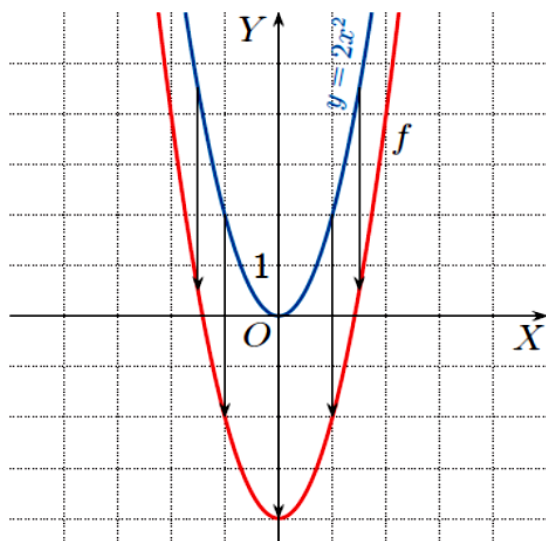


4. Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do paraboli $y = ax^2$?

- | | | | |
|----------------------------------|----------------------|---------------|------------------------|
| a) $P(1, -4)$ | c) $P(-4, 8)$ | e) $P(1, -7)$ | g) $P(-2, -2)$ |
| b) $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ | d) $P(\sqrt{2}, -2)$ | f) $P(2, 1)$ | h) $P(\frac{1}{2}, 4)$ |

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = 2x^2 - 4$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 4 jednostki w dół (rysunek obok).



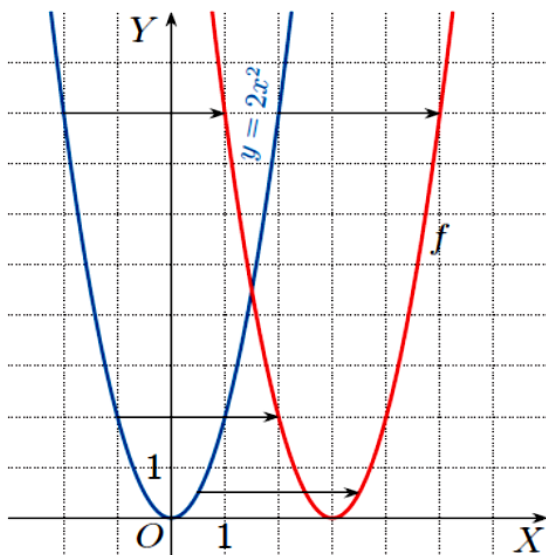
Ćwiczenie 1

Naszkiej wykres funkcji f i określ jej zbiór wartości.

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| a) $f(x) = 2x^2 - 1$ | c) $f(x) = -2x^2 - 1$ |
| b) $f(x) = 2x^2 + 3$ | d) $f(x) = -2x^2 + 3$ |

Przykład 2

Wykres funkcji $f(x) = 2(x-3)^2$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = 2x^2$ o 3 jednostki w prawo (rysunek obok).



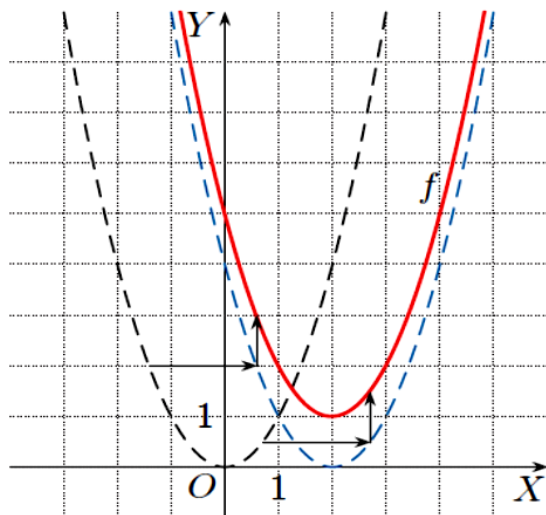
Ćwiczenie 2

Naszkiej wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności.

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| a) $f(x) = 2(x+3)^2$ | c) $f(x) = -2(x+3)^2$ |
| b) $f(x) = 2(x-1)^2$ | d) $f(x) = -2(x-1)^2$ |

Przykład 3

Wykres funkcji $f(x) = (x-2)^2 + 1$ otrzymamy, przesuwając parabolę $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo, a następnie o 1 jednostkę w górę (rysunek obok).



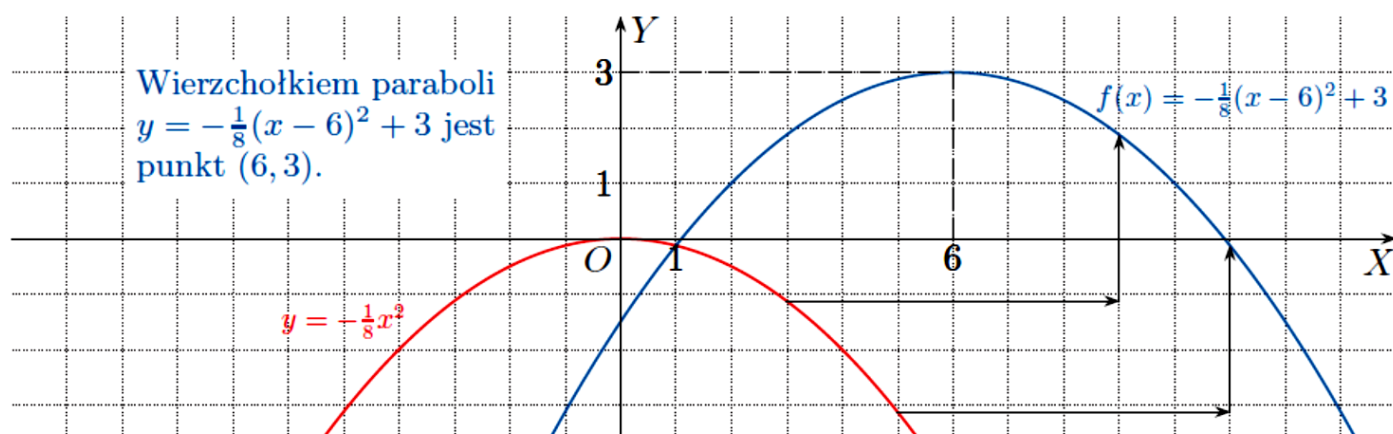
Ćwiczenie 3

Naszkiej wykres funkcji f .

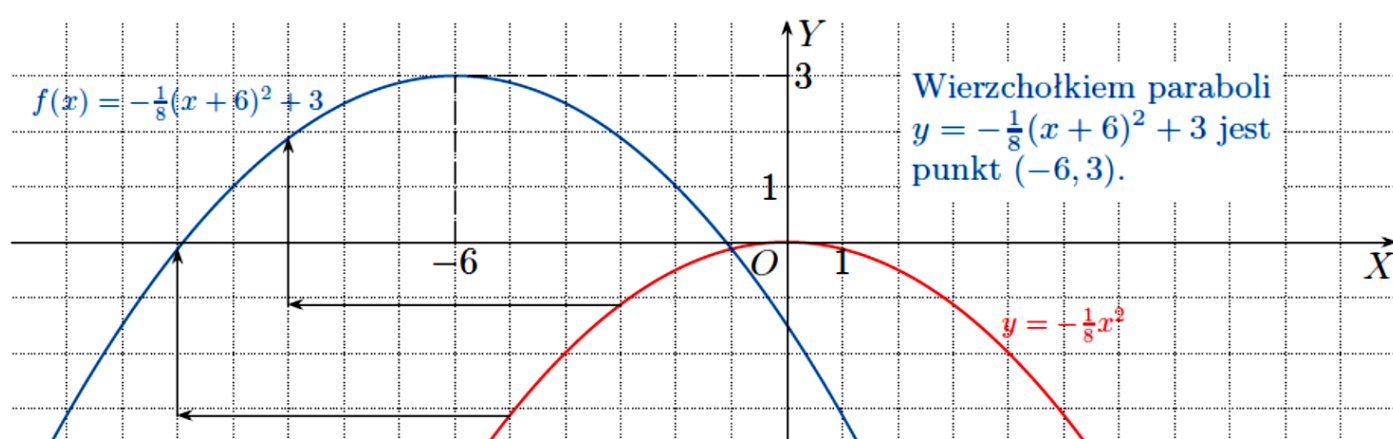
- | |
|-------------------------|
| a) $f(x) = (x-3)^2 - 2$ |
| b) $f(x) = (x+1)^2 + 3$ |

Przykład 4

Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{8}(x-6)^2 + 3$ powstaje przez przesunięcie paraboli $y = -\frac{1}{8}x^2$ o 6 jednostek w prawo i 3 jednostki do góry.



Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{8}(x+6)^2 + 3$ powstaje przez przesunięcie paraboli $y = -\frac{1}{8}x^2$ o 6 jednostek w lewo i 3 jednostki do góry.



Wykresem funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$, gdzie $a \neq 0$, jest parabola o wierzchołku w punkcie (p, q) . Jej osią symetrii jest prosta $x = p$.

Poniższe własności funkcji $f(x) = a(x-p)^2 + q$ zależą od współczynnika a .

$a > 0$	$a < 0$
- ramiona paraboli są skierowane do góry - dla $x = p$ funkcja osiąga wartość najmniejszą $y = q$ - funkcja maleje w przedziale $(-\infty; p)$ - funkcja rośnie w przedziale $\langle p; \infty)$ - zbiorem wartości funkcji jest przedział $\langle q; \infty)$	- ramiona paraboli są skierowane w dół - dla $x = p$ funkcja osiąga wartość największą $y = q$ - funkcja rośnie w przedziale $(-\infty; p)$ - funkcja maleje w przedziale $\langle p; \infty)$ - zbiorem wartości funkcji jest przedział $(-\infty; q]$

Ćwiczenie 4

Podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości funkcji f oraz współrzędne wierzchołka paraboli będącej jej wykresem.

a) $f(x) = 6(x - 3)^2 - 4$

c) $f(x) = -3(x + 4)^2 - \frac{1}{4}$

b) $f(x) = 2(x + 5)^2 + 7$

d) $f(x) = -\frac{2}{5}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 9$

DEFINICJA

Postać:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad \text{gdzie } a \neq 0$$

nazywamy **postacią ogólną** funkcji kwadratowej.

Postać:

$$y = a(x - p)^2 + q, \quad \text{gdzie } a \neq 0$$

nazywamy **postacią kanoniczną** funkcji kwadratowej.

Uwaga. Funkcję kwadratową nazywamy też **trójmianem kwadratowym**.

Ćwiczenie 1

Przeczytaj przykład w ramce pokazujący, w jaki sposób przejść od postaci kanonicznej funkcji kwadratowej do postaci ogólnej.

a) $y = 3(x - 4)^2 - 7 =$	postać kanoniczna
$= 3(x^2 - 8x + 16) - 7 =$	korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$= 3x^2 - 24x + 41$	postać ogólna
b) $y = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 =$	postać kanoniczna
$= -4\left(x^2 + x + \frac{1}{4}\right) + 1 =$	korzystamy ze wzoru $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$= -4x^2 - 4x$	postać ogólna

Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

a) $y = -2(x - 3)^2 + 6$

b) $y = -\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$

c) $y = 3(x - 5)^2 + 9$

Przejście od postaci ogólnej funkcji kwadratowej do postaci kanonicznej wymaga zastosowania uzupełniania do kwadratu.

Przykład 1

$$\text{a) } y = x^2 - 10x + 27 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot 5x + 27 =$$

$$= x^2 - 2 \cdot 5x + 25 - 25 + 27 =$$

$$= (x - 5)^2 - 25 + 27 =$$

$$= (x - 5)^2 + 2$$

postać ogólna

współczynnik -10 zapisujemy jako $-2 \cdot 5$

dodajemy i odejmujemy $25 = 5^2$

korzystamy ze wzoru $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

postać kanoniczna

$$\text{b) } y = x^2 + 5x + 3 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + 3 =$$

$$= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3 =$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 3 =$$

$$= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

postać ogólna

współczynnik 5 występujący przy x zapisujemy jako $2 \cdot \frac{5}{2}$

dodajemy i odejmujemy $\left(\frac{5}{2}\right)^2$

korzystamy ze wzoru

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

postać kanoniczna

Ćwiczenie 2

Postępując tak jak w przykładzie 1., przedstaw funkcję kwadratową w postaci kanonicznej.

$$\text{a) } y = x^2 - 8x + 6$$

$$\text{c) } y = x^2 - 6x - 2$$

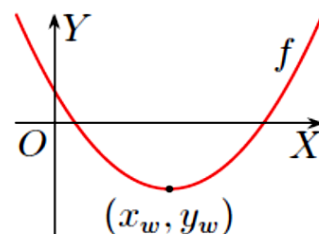
$$\text{e) } y = x^2 + x + \frac{1}{4}$$

$$\text{b) } y = x^2 + 4x + 8$$

$$\text{d) } y = x^2 - 3x + 1$$

$$\text{f) } y = x^2 - x - 2$$

Wykresem funkcji kwadratowej $f(x) = a(x - p)^2 + q$ jest parabola o wierzchołku (p, q) . Współrzędne wierzchołka paraboli oznaczamy zwykle (x_w, y_w) .



TWIERDZENIE

Parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie o współrzędnych:

$$x_w = -\frac{b}{2a}, \quad y_w = -\frac{\Delta}{4a}, \quad \text{gdzie } \Delta = b^2 - 4ac$$

Wyrażenie Δ nazywamy **wyróżnikiem** trójmianu kwadratowego.

1. Przedstaw funkcję kwadratową w postaci ogólnej.

$$\text{a) } y = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$$

$$\text{c) } y = 2(x - 3)^2 + 1$$

$$\text{e) } y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 2$$

$$\text{b) } y = -(x - 4)^2 - 3$$

$$\text{d) } y = -3(x + 2)^2 - 4$$

$$\text{f) } y = -\frac{1}{3}(x - 3)^2 + 4$$

3. Przedstaw funkcję f w postaci kanonicznej. Podaj współrzędne wierzchołka paraboli będącej wykresem tej funkcji.

- a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ d) $f(x) = -4x^2 + 8x + 1$ g) $f(x) = x^2 - x$
b) $f(x) = x^2 - 4x - 2$ e) $f(x) = 2x^2 + 8x - 7$ h) $f(x) = -2x^2 + 6x$
c) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$ f) $f(x) = -2x^2 - 6x + 2$ i) $f(x) = 3x^2 - 8$

Ćwiczenie 1

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli, a następnie przedstaw trójmian kwadratowy w postaci kanonicznej. Naskicuj tę parabolę.

- a) $y = x^2 + 4x + 1$ c) $y = 2x^2 + 4x + 2$ e) $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$
b) $y = -x^2 + 2x - 3$ d) $y = -2x^2 - 8x - 5$ f) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli $f(x) = -2x^2 + 8x - 1$.

$$a = -2, b = 8, \text{ więc } x_w = -\frac{b}{2a} = -\frac{8}{2 \cdot (-2)} = 2.$$

$$\text{Współrzędna } y_w = f(x_w) = f(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 1 = 7.$$

Wierzchołkiem paraboli jest punkt $(2, 7)$.

Wyznacz współrzędne wierzchołka paraboli, korzystając z tego, że $y_w = f(x_w)$.

- a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$ b) $f(x) = -x^2 - 3x + 4$ c) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 10$

Przykład 2

Wyznacz współczynnik b funkcji kwadratowej $f(x) = 3x^2 + bx - 4$, jeśli prosta $x = 1$ jest osią symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji.

$$\text{Mamy } -\frac{b}{2 \cdot 3} = 1.$$

$$\text{Stąd } b = -6.$$

korzystamy ze wzoru $x_w = -\frac{b}{2a}$
oraz z tego, że zgodnie z treścią zadania $x_w = 1$

Ćwiczenie 3

Wyznacz współczynnik b funkcji kwadratowej f , jeśli prosta l jest osią symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji.

- a) $f(x) = x^2 + bx + 4$, $l: x = 2$ c) $f(x) = 2x^2 + bx - 1$, $l: x = -1$
b) $f(x) = -x^2 + bx - 3$, $l: x = 4$ d) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx - 7$, $l: x = -6$

Ćwiczenie 4

Przeczytaj podany w ramce przykład.

Wykresem funkcji f jest parabola o wierzchołku $(3, -2)$. Wiedząc, że punkt $(4, 1)$ należy do tej paraboli, zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i ogólnej.

Zauważmy, że $f(x) = a(x - 3)^2 - 2$. wykorzystujemy postać kanoniczną funkcji f

Stąd $1 = a(4 - 3)^2 - 2$, czyli $a = 3$. korzystamy z tego, że $f(4) = 1$

Zatem postać kanoniczna funkcji to $f(x) = 3(x - 3)^2 - 2$, a postać ogólna $f(x) = 3x^2 - 18x + 25$.

Dana jest funkcja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej i wyznacz współczynniki: a , b , c , jeśli do paraboli będącej jej wykresem należy punkt P , a wierzchołkiem tej paraboli jest punkt W .

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|--------------------------|
| a) $P(0, 2)$, $W(2, 0)$ | c) $P(3, 1)$, $W(0, 3)$ | e) $P(2, 1)$, $W(1, 2)$ |
| b) $P(0, 0)$, $W(-1, -1)$ | d) $P(-2, 0)$, $W(-1, 3)$ | f) $P(1, 2)$, $W(2, 4)$ |

1. Wykres funkcji $f(x) = x^2 + bx + c$ jest symetryczny względem prostej l i przecina oś OY w punkcie P . Wyznacz współczynniki b i c . Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej.

- | | |
|----------------------------|---------------------------------------|
| a) $l: x = 1$, $P(0, 1)$ | c) $l: x = 3$, $P(0, -6)$ |
| b) $l: x = -4$, $P(0, 2)$ | d) $l: x = -\frac{1}{2}$, $P(0, -4)$ |

Uwaga: Prosta l , która jest osią symetrii wskazuje pierwszą współrzędną wierzchołka paraboli p .

2. Zapisz wzór funkcji kwadratowej $y = ax^2 + 6x - 8$ w postaci kanonicznej, jeśli jej wykresem jest parabola o wierzchołku, którego pierwsza współrzędna jest równa x_w .
- a) $x_w = -3$ c) $x_w = -6$ e) $x_w = \frac{3}{2}$
b) $x_w = 3$ d) $x_w = 12$ f) $x_w = -\frac{3}{2}$
3. Znajdź współczynniki b i c funkcji kwadratowej $y = x^2 + bx + c$, mając dane współrzędne wierzchołka (x_w, y_w) paraboli będącej jej wykresem.
- a) $(2, 4)$ c) $(\frac{1}{2}, -1)$ e) $(10, 0)$
b) $(-1, -3)$ d) $(0, 3)$ f) $(-4, 4)$
4. Zapisz wzór funkcji f w postaci kanonicznej. Naskicuj jej wykres, podaj przedziały monotoniczności i zbiór wartości.
- a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$ c) $f(x) = 2x^2 + 8x + 4$ e) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 9$
b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$ d) $f(x) = -2x^2 + 2x$ f) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x - 1$

Równania kwadratowe

Przykład 3

Rozwiąż równanie $4x^2 - 9 = 0$.

Korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów: $4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3)$.

$$(2x + 3)(2x - 3) = 0$$

czyli $2x + 3 = 0$ lub $2x - 3 = 0$, zatem $x = -\frac{3}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $16x^2 - 25 = 0$ b) $4 - 100x^2 = 0$ c) $4x^2 - 121 = 0$ d) $\frac{9}{4}x^2 - 81 = 0$

TWIERDZENIE

Rozważmy równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$, gdzie $a \neq 0$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to równanie ma **dwa** pierwiastki:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Jeśli $\Delta = 0$, to równanie ma **jeden** pierwiastek:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

3. Jeśli $\Delta < 0$, to równanie **nie ma** pierwiastków.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj przedstawione w poniższej ramce rozwiązania trzech równań.

a) $3x^2 - 4x - 2 = 0$

$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 16 + 24 = 40$. Ponieważ $\Delta > 0$, równanie ma dwa pierwiastki.

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 - 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 - \sqrt{10}}{3}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{10}}{6} = \frac{2 + \sqrt{10}}{3}$$

b) $4x^2 + 6x + \frac{9}{4} = 0$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 4 \cdot \frac{9}{4} = 36 - 36 = 0$, równanie ma zatem jeden pierwiastek podwójny.

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$$

c) $7x^2 - 3x + 2 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 7 \cdot 2 = 9 - 56 = -47 < 0$, więc równanie jest sprzeczne.

Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$

c) $28x^2 - 4x + \frac{1}{7} = 0$

e) $-3x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $4x^2 - x - 5 = 0$

d) $-x^2 + 6x + 1 = 0$

f) $6x^2 - 2x - 1 = 0$

1. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 - 9x - 35 = 0$

d) $5x^2 - 6x + 6 = 0$

g) $\frac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0$

b) $4x^2 - 13x + 3 = 0$

e) $-2x^2 + 5x - 3 = 0$

h) $x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0$

c) $-6x^2 + 13x + 5 = 0$

f) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

i) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{x}{3} + \frac{1}{9} = 0$

2. Rozwiąż równanie.

a) $2x^2 + 3 = -7x$

d) $-2x - 3x^2 + 6 = 0$

g) $11(x^2 + 5) = x$

b) $x + 10 = 3x^2$

e) $5x^2 = 2 - 2x$

h) $x^2 + x = 4x + 7$

c) $16x^2 + 24\sqrt{2}x = -18$

f) $5x^2 = 8x - 5$

i) $3x^2 + 1 = 7x$

TWIERDZENIE

Dany jest trójmian kwadratowy $y = ax^2 + bx + c$.

- Jeśli $\Delta > 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_1)(x - x_2)$, gdzie x_1, x_2 są pierwiastkami tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta = 0$, to trójmian można przedstawić w postaci iloczynowej $y = a(x - x_0)^2$, gdzie x_0 jest pierwiastkiem podwójnym tego trójmianu.
- Jeśli $\Delta < 0$, to trójmianu nie można rozłożyć na czynniki liniowe.

Przykład 2

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

a) $y = 2x^2 + 5x - 3$

$$\Delta = 25 + 24 = 49, \sqrt{\Delta} = 7, \text{ zatem:}$$

$$x_1 = \frac{-5-7}{4} = -3, \quad x_2 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Postać iloczynowa: } y = 2(x + 3)(x - \frac{1}{2}).$$

b) $y = x^2 - 2x - 1$

$$\Delta = 4 + 4 = 8, \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}, \text{ zatem:}$$

$$x_1 = \frac{2-2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}, \quad x_2 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Postać iloczynowa: } y = (x - (1 - \sqrt{2}))(x - (1 + \sqrt{2})), \text{ którą możemy za-} \\ \text{pisać: } y = (x - 1 + \sqrt{2})(x - 1 - \sqrt{2}).$$

c) $y = -2x^2 + x - 4$

$$\Delta = 1 - 32 = -31 < 0, \text{ więc trójmian nie ma pierwiastków i nie można go} \\ \text{rozłożyć na czynniki liniowe.}$$

Ćwiczenie 4

Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

a) $y = 2x^2 + 5x - 3$

c) $y = -x^2 + 5x + 14$

e) $y = 12x^2 + 11x + 2$

b) $y = 3x^2 - 7x + 2$

d) $y = -4x^2 - x + 3$

f) $y = 6x^2 - 13x + 5$

Ćwiczenie 5

Przedstaw (jeśli to możliwe) trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

a) $y = x^2 + 3x - 1$

c) $y = 2x^2 - 3x + 4$

e) $y = -x^2 - 2x + \frac{1}{4}$

b) $y = 2x^2 - 2x - 1$

d) $y = -5x^2 + x + 1$

f) $y = -7x^2 + 10x - 4$

Ćwiczenie 6

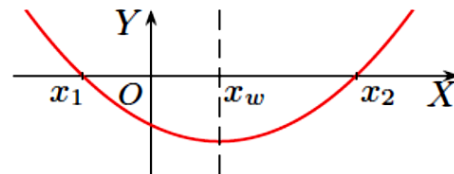
Przedstaw trójmian kwadratowy w postaci iloczynowej.

a) $y = 5x^2 - 3x$

b) $y = 16x^2 - 1$

c) $y = 9x^2 - 8$

Znajomość miejsc zerowych x_1, x_2 funkcji kwadratowej pozwala wyznaczyć oś symetrii paraboli i współrzędną x_w jej wierzchołka, gdyż $x_w = \frac{x_1+x_2}{2}$.



Przykład 2

Wyznacz trójmian kwadratowy, którego pierwiastkami są liczby 2 i 4, a zbiorem wartości jest przedział $\langle -2; \infty \rangle$.

Trójmian zapisujemy w postaci iloczynowej $y = a(x-2)(x-4)$. Wyznaczamy współrzędne wierzchołka: $x_w = \frac{2+4}{2} = 3$, $y_w = -2$. Podstawiamy $x = 3$ i $y = -2$ do wzoru $y = a(x-2)(x-4)$ i otrzymujemy $-2 = a(3-2)(3-4)$, skąd $a = 2$. Zatem trójmian ma postać $y = 2(x-2)(x-4)$.

Ćwiczenie 2

Wyznacz trójmian kwadratowy o pierwiastkach x_1, x_2 i zbiorze wartości Y .

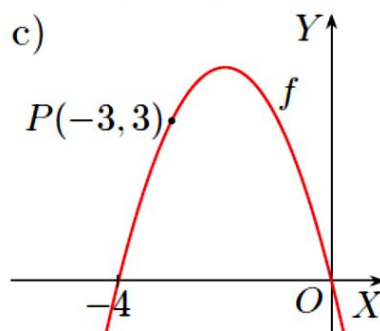
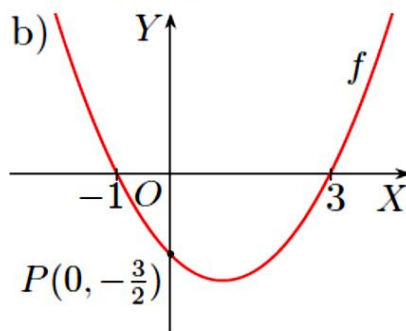
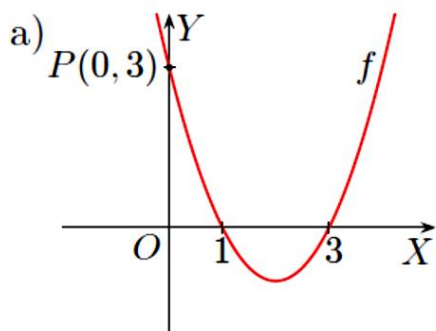
- | | |
|--|---|
| a) $x_1 = -1, x_2 = 3, Y = \langle -4; \infty \rangle$ | c) $x_1 = -8, x_2 = 2, Y = (-\infty; 10]$ |
| b) $x_1 = -4, x_2 = 0, Y = (-\infty; 2]$ | d) $x_1 = 0, x_2 = 6, Y = \langle -6; \infty \rangle$ |

Ćwiczenie 3

Wyznacz równanie osi symetrii paraboli oraz współrzędne jej wierzchołka.

- | | | |
|-------------------|--------------------------------|-----------------------|
| a) $y = x(x-6)$ | c) $y = \frac{1}{2}(x+6)(x-2)$ | e) $y = (2x+1)(2x-3)$ |
| b) $y = -x(x-10)$ | d) $y = -2(x+3)(x-4)$ | f) $y = (4x-1)(5-4x)$ |

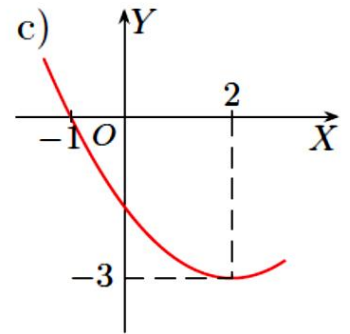
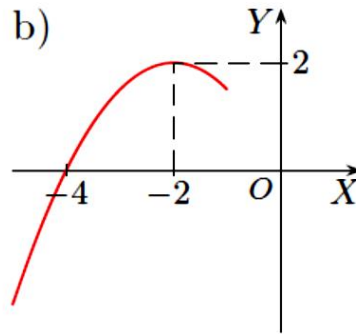
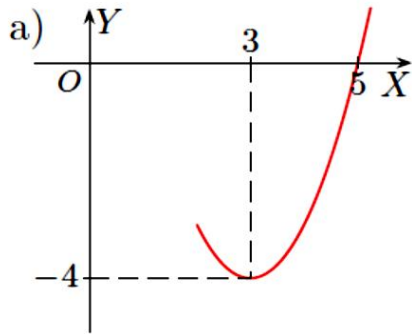
1. Na rysunku przedstawiono parabolę, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Wyznacz wzór tej funkcji w postaciach iloczynowej i ogólnej.



2. Wyznacz w postaciach iloczynowej i ogólnej równanie paraboli przechodzącej przez punkty: A, B i C .

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| a) $A(1, 0), B(4, 0), C(3, -4)$ | c) $A(-5, 0), B(-3, 10), C(2, 0)$ |
| b) $A(-6, 0), B(2, 0), C(0, -6)$ | d) $A(0, -9), B(1, 0), C(3, 0)$ |

3. Na rysunku przedstawiono fragment paraboli, która jest wykresem funkcji kwadratowej f . Znajdź drugie miejsce zerowe tej funkcji. Wyznacz wzór funkcji f w postaciach iloczynowej i kanonicznej.

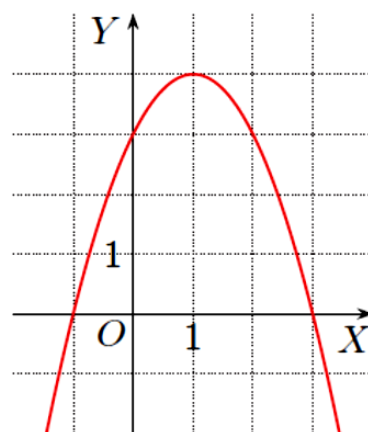


Przykład 1

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x + 3 > 0$.

Z wykresu funkcji $y = -x^2 + 2x + 3$ (rysunek obok) odczytujemy, że $-x^2 + 2x + 3 > 0$ dla $x \in (-1; 3)$.

Uwaga. Zauważ, że do rozwiązywania nierówności kwadratowej nie potrzebujemy dokładnego wykresu odpowiedniej funkcji, wystarczy znajomość jej miejsc zerowych i informacja o tym, czy ramiona paraboli, będącej wykresem tej funkcji, są skierowane w górę, czy w dół.

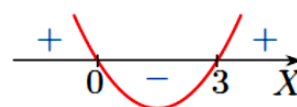
**Przykład 2**

Rozwiąż nierówność.

a) $2x^2 - 6x > 0$

W celu wyznaczenia miejsc zerowych funkcji $y = 2x^2 - 6x$ rozwiązujemy równanie $2x^2 - 6x = 0$, czyli $2x(x - 3) = 0$. Zatem $x = 0$ lub $x = 3$.

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych do góry (współczynnik przy x^2 jest dodatni), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Z wykresu odczytujemy: $2x^2 - 6x > 0$ dla $x \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$.



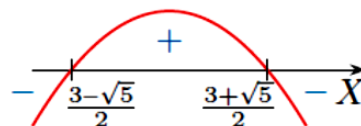
b) $-x^2 + 3x - 1 \geq 0$

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 3x - 1 = 0$.

$$\Delta = 9 - 4 = 5, \text{ zatem: } x_1 = \frac{-3-\sqrt{5}}{-2} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{5}}{-2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Rozwiązania równania zaznaczamy na osi OX . Szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół (współczynnik przy x^2 jest ujemny), przechodzącą przez zaznaczone punkty. Z wykresu odczytujemy:

$$-x^2 + 3x - 1 \geq 0 \text{ dla } x \in \left\langle \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right\rangle.$$



Ćwiczenie 1

Rozwiąż nierówność.

a) $3x^2 - 2x - 1 \geq 0$

b) $-x^2 + 2x + 4 > 0$

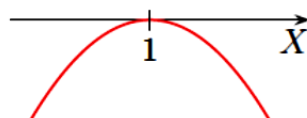
c) $2x^2 + x - 1 \leq 0$

Przykład 3

Rozwiąż nierówność $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$.

Rozwiązujemy równanie $-x^2 + 2x - 1 = 0$, czyli $-(x - 1)^2 = 0$. Zatem $x = 1$ (jest to pierwiastek podwójny). Rozwiązanie równania zaznaczamy na osi OX i szkicujemy parabolę o ramionach skierowanych w dół.

Z wykresu odczytujemy: $-x^2 + 2x - 1 \geq 0$ dla $x = 1$.

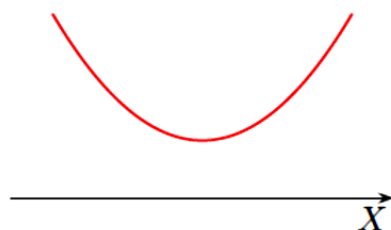


Przykład 4

a) Rozwiąż nierówność $5x^2 - 3x + 2 < 0$.

$$\Delta = 9 - 4 \cdot 5 \cdot 2 = -31 < 0$$

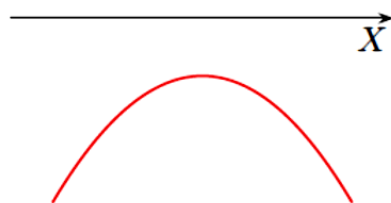
Współczynnik przy x^2 jest dodatni oraz równanie $5x^2 - 3x + 2 = 0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem nad osią OX , a to oznacza, że nierówność jest sprzeczna.



b) Rozwiąż nierówność $-3x^2 + 2x - 1 < 0$.

$$\Delta = 4 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) = -8 < 0$$

Współczynnik przy x^2 jest ujemny oraz równanie $-3x^2 + 2x - 1 = 0$ nie ma pierwiastków. Parabola znajduje się zatem pod osią OX , a to oznacza, że nierówność jest prawdziwa dla dowolnego x , czyli $x \in \mathbb{R}$.



Ćwiczenie 2

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2 + 4x + 1 > 0$

b) $x^2 + x + 1 < 0$

c) $-2x^2 + \sqrt{2}x - 1 \leq 0$

Przykład 5

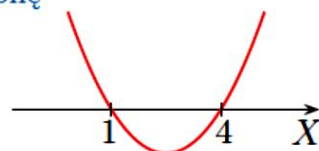
Rozwiąż nierówność $2(2 - x) < -x(x - 3)$.

$$4 - 2x < -x^2 + 3x$$

$$x^2 - 5x + 4 < 0$$

wykonujemy mnożenie
przenosimy wszystkie wyrazy
na lewą stronę

Rozwiązujemy równanie $x^2 - 5x + 4 = 0$ i otrzymujemy $x = 1$ lub $x = 4$. Szkicujemy parabolę i odczytujemy, że nierówność jest spełniona dla $x \in (1; 4)$.



3. Rozwiąż nierówność.

a) $-2x^2 + 6x - \frac{9}{2} < 0$ c) $x^2 + 2x + 2 > 0$ e) $2x^2 - x + \frac{1}{2} \leq 0$
b) $-3x^2 + 2x - \frac{1}{3} \leq 0$ d) $-9x^2 + 2x - \frac{1}{9} < 0$ f) $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$

4. Wyznacz zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości większe niż funkcja g .

a) $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, $g(x) = 3x^2 + 4x$

b) $f(x) = 3x^2 + x - 2$, $g(x) = x^2 - 2x$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2 - 3x + 1 \geq -x^2 + 2x + 8$ c) $(2x - 2)(x - 3) < (x - 3)(x - 4)$

b) $(2x - 2)^2 \geq (3x - 2)(x - 3)$ d) $(3x - 1)(x + 2) \geq (x - 3)(2x - 1)$

Uwaga do zadania 4: Należy ułożyć nierówność postaci $f(x) > g(x)$, a następnie wstawić do niej postaci funkcji i rozwiązać nierówność. Gdyby pytano o te argumenty dla których funkcja f przyjmuje wartości mniejsze niż funkcja g należy ułożyć nierówność postaci $f(x) < g(x)$.

DEFINICJA

Funkcję określoną wzorem $y = ax + b$ dla $x \in \mathbf{R}$, gdzie a i b są stałymi, nazywamy **funkcją liniową**.

Uwaga. Wzór funkcji liniowej możemy również zapisać w postaci $f(x) = ax + b$.

Wykresem funkcji liniowej jest **prosta**. Aby naszkicować wykres funkcji liniowej, wystarczy znaleźć dwa należące do niego punkty i poprowadzić przez nie prostą (przez dwa różne punkty przechodzi tylko jedna prosta).

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $y = \frac{5}{3}x - 1$.

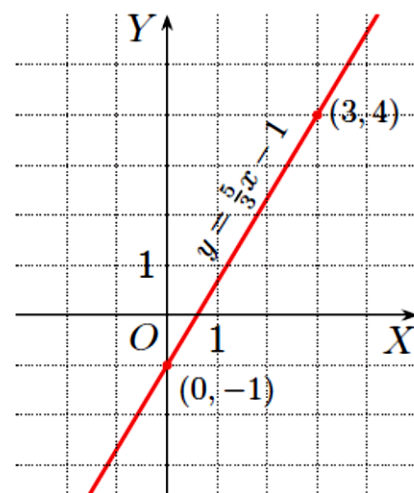
Dla $x = 0$ mamy $y = \frac{5}{3} \cdot 0 - 1 = -1$.

Dla $x = 3$ mamy $y = \frac{5}{3} \cdot 3 - 1 = 4$.

Otrzymane wyniki można przedstawić w tabeli.

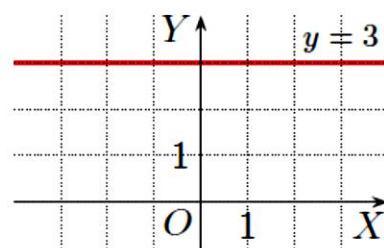
x	0	3
y	-1	4

punkty $(0, -1)$ i $(3, 4)$ należą do wykresu funkcji



Przykład 3

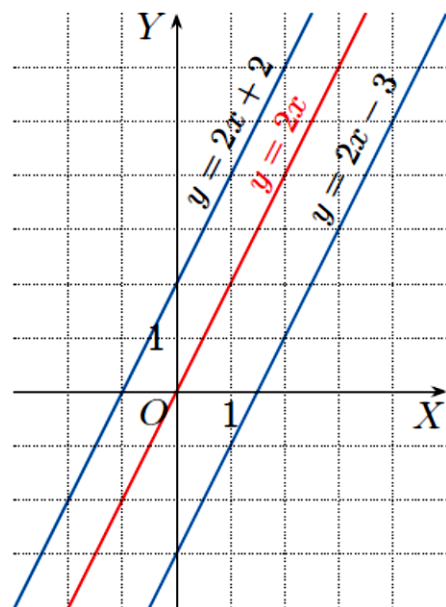
Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = 3$. Do prostej będącej wykresem tej funkcji należą wszystkie punkty o współrzędnych $(x, 3)$, gdzie x jest dowolną liczbą rzeczywistą. Zauważ, że ta prosta jest równoległa do osi OX .



Przykład 1

Na rysunku obok przedstawiono wykresy funkcji liniowych: $y = 2x$, $y = 2x + 2$ i $y = 2x - 3$.

Funkcje te mają ten sam – równy 2 – współczynnik kierunkowy. Proste będące ich wykresami są równoległe. Zauważmy, że prostą $y = 2x + 2$ możemy otrzymać, przesuwając prostą $y = 2x$ o dwie jednostki w górę. Prostą $y = 2x - 3$ możemy otrzymać, przesuwając prostą $y = 2x$ o trzy jednostki w dół.



Ćwiczenie 1

W tym samym układzie współrzędnych naszkicuj wykresy funkcji liniowych: $y = 3x$, $y = 3x + 1$, $y = 3x + 3$ i $y = 3x - 2$.

Wykresy funkcji liniowych o tym samym współczynniku kierunkowym są prostymi równoległymi.

Ćwiczenie 2

Naszkicuj w jednym układzie współrzędnych te spośród prostych: l_1 , l_2 , l_3 , l_4 , które są równoległe do prostej $y = -\frac{1}{2}x$.

$$l_1: y = -\frac{1}{2}x + 1, \quad l_2: y = \frac{1}{2}x + 2, \quad l_3: y = -\frac{1}{2}x - 2, \quad l_4: y = -0,5x - 3$$

Przykład 2

Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P(3, 5)$ i równoległej do prostej k : $y = 2x - 7$.

Prosta l jest równoległa do prostej k , ma więc ten sam współczynnik kierunkowy równy 2. Zatem l : $y = 2x + b$ dla pewnego $b \in \mathbf{R}$. Podstawiamy do równania współrzędne punktu P : $5 = 2 \cdot 3 + b$ i otrzymujemy $b = -1$. Prosta l ma zatem równanie $y = 2x - 1$.

Ćwiczenie 3

Wyznacz równanie prostej l przechodzącej przez punkt P i równoległej do prostej k . Naskicuj prostą l .

a) $k: y = 2x - 7, P(2, 1)$

c) $k: y = \frac{1}{2}x + 6, P(-2, -5)$

b) $k: y = -3x + 6, P(1, -1)$

d) $k: y = \frac{2}{3}x - \sqrt{2}, P\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

Przykład 3

Wyznacz punkt przecięcia wykresu funkcji $y = \frac{4}{5}x + 3$ z osią OY .

Jeśli podstawimy $x = 0$ do wzoru funkcji, to otrzymamy rzędną punktu, w którym jej wykres przecina oś OY .

Zatem $y = \frac{4}{5} \cdot 0 + 3 = 3$, czyli wykres przecina oś OY w punkcie $(0, 3)$.

Ćwiczenie 4

Wyznacz punkt przecięcia wykresu funkcji z osią OY .

a) $y = 5x - 9$

b) $y = -6x + \frac{3}{4}$

c) $y = \frac{2}{3}x + \sqrt{2}$

d) $y = -\sqrt{3}x$

Prosta będąca wykresem funkcji liniowej $y = ax + b$ przecina oś OY w punkcie $(0, b)$.

3. Wyznacz wzór prostej l , która przechodzi przez punkt P i jest równoległa do prostej k . W jakim punkcie prosta l przecina oś OY ?

a) $k: y = 4x - 2, P(0, 5)$

c) $k: y = -\frac{4}{3}x + 6, P(-6, 5)$

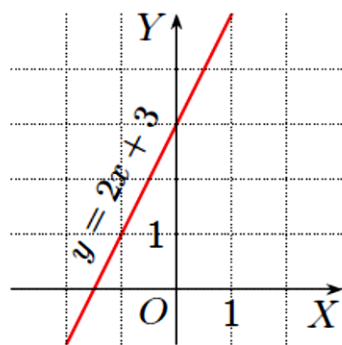
b) $k: y = -3x + 4, P(1, 8)$

d) $k: y = \sqrt{3}x - 3, P(2\sqrt{3}, 6)$

Miejsce zerowe funkcji liniowej

Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $y = 2x + 3$. Jej miejsce zerowe jest równe $-\frac{3}{2}$. Aby je wyznaczyć, rozwiązujemy równanie $2x + 3 = 0$.

Jeśli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $y = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$.



Przykład 1

Wyznacz punkty, w których prosta $y = -\frac{1}{2}x + 2$ przecina osie układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tą prostą i osiami układu współrzędnych.

Aby wyznaczyć punkt, w którym prosta przecina oś OX , znajdujemy miejsce zerowe funkcji, której jest wykresem:

$$-\frac{1}{2}x + 2 = 0, \text{ stąd } x = 4$$

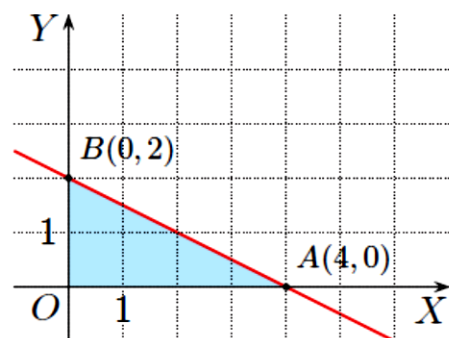
Zatem prosta $y = -\frac{1}{2}x + 2$ przecina:

– oś OX w punkcie $A(4, 0)$,

– oś OY w punkcie $B(0, 2)$.

Szkicujemy prostą $y = -\frac{1}{2}x + 2$ (rysunek obok).

Pole trójkąta AOB : $P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = 4$.



Ćwiczenie 3

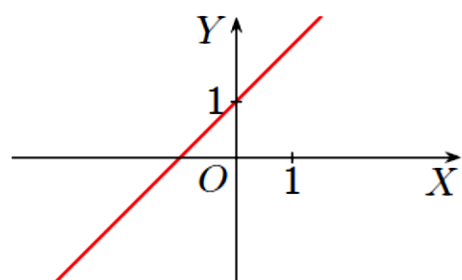
Wyznacz punkty, w których prosta l przecina osie układu współrzędnych. Oblicz pole trójkąta ograniczonego tą prostą i osiami układu współrzędnych.

a) $l: y = 2x - 6$

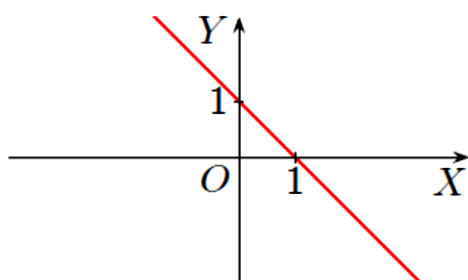
b) $l: y = -\frac{1}{3}x - 2$

c) $l: y = \frac{3}{5}x + 3$

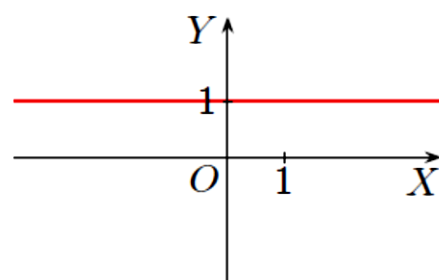
Monotoniczność funkcji liniowej



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości rosną wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, której wartości maleją wraz ze wzrostem argumentów.



Na rysunku przedstawiono wykres funkcji liniowej, która przyjmuje stale tę samą wartość.

DEFINICJA

Funkcję f nazywamy:

- **rosnącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) < f(x_2)$,
- **malejącą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 spełniony jest warunek: jeśli $x_1 < x_2$, to $f(x_1) > f(x_2)$,
- **stałą**, jeśli dla dowolnych argumentów x_1, x_2 prawdziwa jest równość: $f(x_1) = f(x_2)$.

Funkcje rosnące, malejące i stałe nazywamy funkcjami **monotonicznymi**.

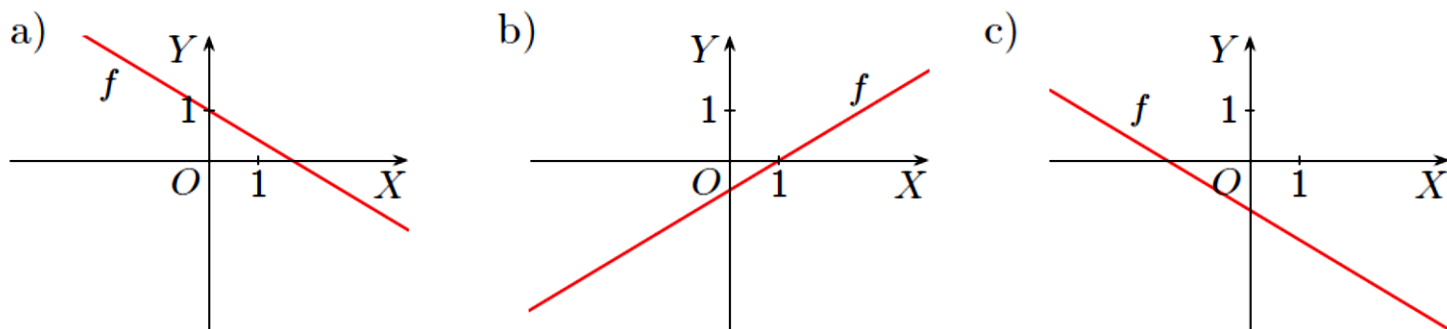
To, czy funkcja liniowa jest rosnąca, malejąca czy stała, zależy od jej współczynnika kierunkowego.

TWIERDZENIE

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest rosnąca dla $a > 0$, malejąca dla $a < 0$, stała dla $a = 0$.

Ćwiczenie 4

Dany jest wykres funkcji $f(x) = ax + b$. Podaj znaki współczynników a i b .



Ćwiczenie 5

Określ monotoniczność funkcji f .

- a) $f(x) = 5x - 12$ b) $f(x) = 8 - 3x$ c) $f(x) = (3 - 2\sqrt{2})x$ d) $f(x) = -3$

ZADANIA

1. Wyznacz punkty, w których prosta przecina osie układu współrzędnych. Naskicuj tę prostą.

a) $y = x + 5$ c) $y = -2x + 4$ e) $y = \frac{3}{2}x - 6$ g) $y = -\frac{3}{4}x + 3$
b) $y = 2x - 4$ d) $y = \frac{1}{2}x - 3$ f) $y = -x + \frac{3}{2}$ h) $y = \frac{2}{5}x - 4$

2. Naskicuj w jednym układzie współrzędnych wykresy funkcji: f , g i h . Określ monotoniczność każdej z tych funkcji.

a) $f(x) = x - 4$, $g(x) = -\frac{1}{2}x - 4$, $h(x) = -4$
b) $f(x) = -0,5x + 3$, $g(x) = 3$, $h(x) = 0,75x + 3$

3. Podaj miejsce zerowe funkcji oraz zbiór argumentów, dla których przyjmuje ona wartości ujemne.

a) $y = 3x - 6$ b) $y = 6x + 4$ c) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ d) $y = \sqrt{2}x + 4$

Aby wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez dwa punkty $A(x_A, y_A)$ i $B(x_B, y_B)$ należy wstawić ich współrzędne do równania funkcji $y = ax + b$ i rozwiązać układ równań z niewiadomymi a i b , wyznaczając współczynniki funkcji.

Przykład: wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty A(3, -2) i B(-1, 1). Gdy wstawimy współrzędne punktu A do wzoru otrzymujemy równanie $-2 = 3a + b$. Gdy wstawimy do wzoru współrzędne punktu B otrzymujemy $1 = -a + b$. Po rozwiązaniu układu równań:

$$+ \begin{cases} -2 = 3a + b \\ 1 = -a + b. \end{cases}$$

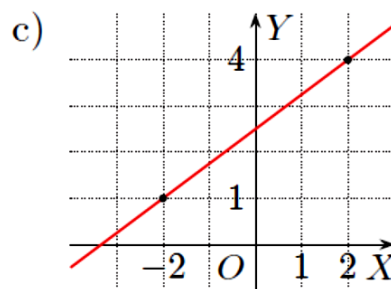
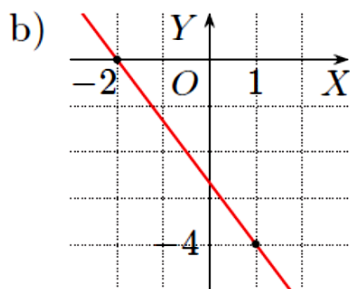
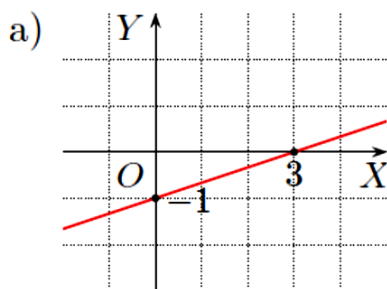
$$-1 = 2a \quad / :2$$

$$a = -0,5$$

Dalej po wyznaczeniu a wstawiamy za a do dowolnego równania układu liczbę $-0,5$, by wyznaczyć b : $1 = -(-0,5) + b$, stąd $1 = 0,5 + b$, a stąd $b = 1 - 0,5$, czyli $b = 0,5$.

Zatem funkcja ma postać $y = -0,5x + 0,5$.

2. Wyznacz równanie prostej przedstawionej na rysunku. Sprawdź, czy punkt $(-10, -5)$ należy do tej prostej.



Ćwiczenie 1

Wyznacz równanie prostej przechodzącej przez punkty C i D . Czy ta prosta jest wykresem funkcji liniowej?

a) $C(1, 4), D(3, 6)$

c) $C(-4, 4), D(-2, 3)$

e) $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{5}), D(5, 2)$

b) $C(-3, 4), D(-3, 6)$

d) $C(-5, -3), D(7, -3)$

f) $C(8, -2), D(8, 6)$

6. Naskicuj prostą o podanym równaniu. Wyznacz punkty, w których przecina ona osie układu współrzędnych.

a) $2x - y + 2 = 0$

c) $-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}y - 2 = 0$

e) $-4(y - \frac{1}{4}x) = 16$

b) $10x + 5y - 5 = 0$

d) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y - 2\frac{1}{4} = 0$

f) $2(1 - \frac{1}{3}y) - 4x = 0$

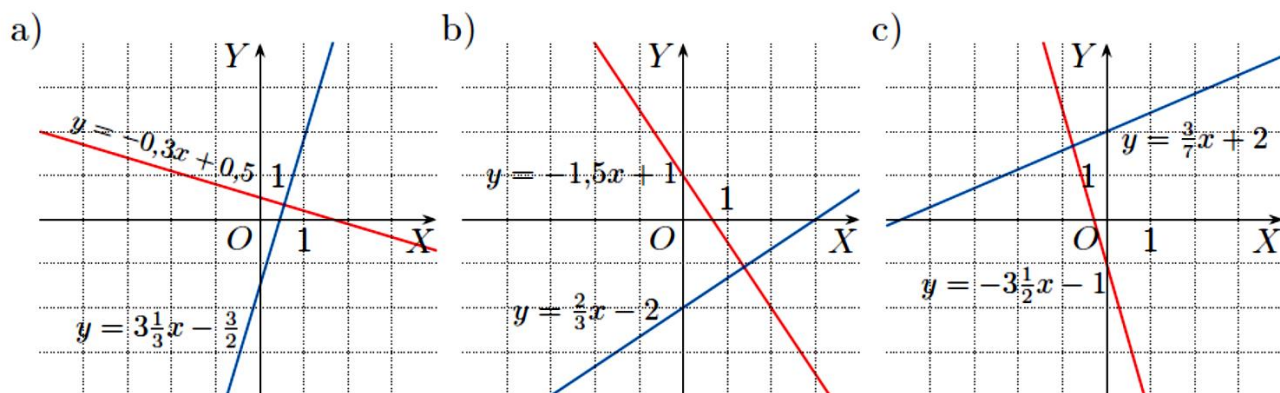
Podpowiedź: wyznaczyć z równania y .

TWIERDZENIE

Proste $y = ax + b$ ($a \neq 0$) i $y = a_1x + b_1$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = -\frac{1}{a}$ (czyli $a \cdot a_1 = -1$).

Ćwiczenie 2

Sprawdź, czy proste przedstawione na rysunku są prostopadłe.

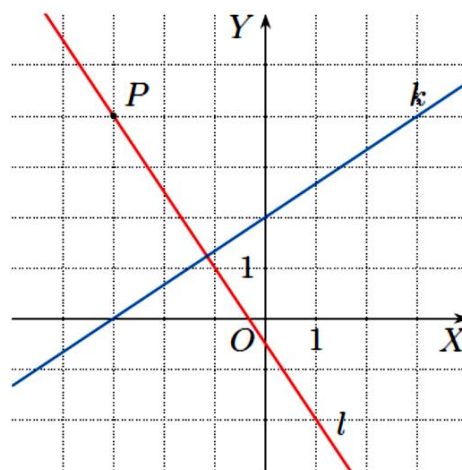


Przykład 2

Prosta k ma równanie $y = \frac{2}{3}x + 2$. Wyznacz równanie prostej l prostopadłej do prostej k i przechodzącej przez punkt $P(-3, 4)$.

Równanie prostej l ma postać $y = -\frac{3}{2}x + b$ (ponieważ $l \perp k$). Podstawiamy do równania współrzędne punktu $P(-3, 4)$ i otrzymujemy $4 = -\frac{3}{2} \cdot (-3) + b$, stąd $b = -\frac{1}{2}$.

Prosta l ma zatem równanie: $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.



Ćwiczenie 4

Wyznacz równanie prostej prostopadłej do podanej prostej i przechodzącej przez punkt P .

- a) $y = -3x + 2$, $P(0, -1)$ b) $y = -0,1x$, $P(1, 9)$ c) $y = \frac{3}{7}x + 9$, $P(3, 2)$

8. Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .

- a) $f(x) = (m - 3)x + 6$ b) $f(x) = (m + \frac{1}{2})x$ c) $f(x) = (4 - 2m)x - 7$

2. Określ monotoniczność funkcji f w zależności od parametru m .

- a) $f(x) = (m + \frac{1}{2})x - 7$ b) $f(x) = (6 - \frac{2}{3}m)x + 9$

Zadanie:

- a) Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = (-2m+3)x-2$ i $g(x) = (5m+2)x-9$ są równoległe?
b) Dla jakich wartości parametru m wykresy funkcji $f(x) = (-2m+3)x-2$ i $g(x) = 5x-9$ są prostopadłe?

Przed obowiązkową maturą z matematyki

Test

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest prawidłowa.

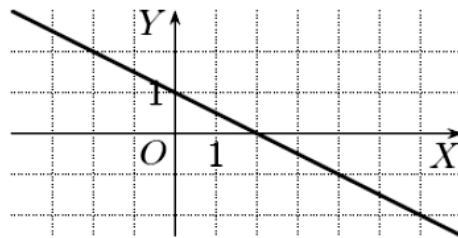
1. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji liniowej o wzorze:

A. $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$,

C. $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$,

B. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$,

D. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$.



2. Przez którą ćwiartkę układu współrzędnych nie przechodzi wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{3}x - 4$?

A. I

B. II

C. III

D. IV

3. Miejsce zerowe funkcji $f(x) = \sqrt{2}x + 4$ jest równe:

A. $-2\sqrt{2}$,

B. $\sqrt{2}$,

C. 2,

D. $2\sqrt{2}$.

4. Prosta przechodząca przez punkt $(-1, 6)$ i przecinająca oś OX w punkcie o odciętej 1 przecina oś OY w punkcie:

A. $(0, 3)$,

B. $(0, \frac{3}{2})$,

C. $(0, -3)$,

D. $(0, -6)$.

5. Punkt $A(2k, 7)$ należy do wykresu funkcji $f(x) = 2x + 1$ dla:

A. $k = \frac{2}{3}$,

B. $k = \frac{3}{2}$,

C. $k = \frac{1}{2}$,

D. $k = 7$.

6. Do wykresu funkcji $f(x) = -\frac{3}{4}x + 6$ nie należy punkt:

A. $(-8, 12)$,

B. $(5\frac{1}{3}, 2)$,

C. $(-16, 15)$,

D. $(-32, 30)$.

7. Proste $y = 3x + 3m$ i $y = (2m + 1)x + 6$ są prostopadłe, gdy:

A. $m = 0$,

B. $m = -1$,

C. $m = -\frac{1}{3}$,

D. $m = -\frac{2}{3}$.

8. Rozwiązaniem układu równań $\begin{cases} -x + 2y = 4 \\ 2x - 3y = 0 \end{cases}$ jest para liczb:

A. $x = 12, y = 8$,

C. $x = 8, y = 12$,

B. $x = -12, y = -8$,

D. $x = 4, y = 4$.

9. Pierwsze równanie układu równań ma postać $2x - 3y = 2$. Układ ten jest sprzeczny, gdy drugim jego równaniem jest:

A. $2x - 4 = 3y$,

C. $x = 3y + 2$,

B. $2x - y = 2$,

D. $x - 1 = 1,5y$.

FUNKCJE

Dziedzina i miejsce zerowe

Przykład 1

Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{x}{x-2}$ jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{2\}$, ponieważ dla $x = 2$ mianownik jest równy 0.

Ćwiczenie 1

Podaj dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{x}{x+2}$ c) $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$ d) $f(x) = \frac{x^2}{2x+5}$

Przykład 2

a) Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-3}$ jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 3\}$.

b) Dziedziną funkcji $f(x) = \frac{1}{x(x-4)}$ jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{0, 4\}$.

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{x+3}{x(x+6)}$ c) $f(x) = \frac{2x}{(x-1)(x-2)}$

Przykład 3

a) Podaj dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{1+x}$.

Musi zachodzić nierówność $1+x \geq 0$, czyli $x \geq -1$. Zatem $D = \langle -1; \infty \rangle$.

b) Podaj dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

Nierówność $1+x^2 \geq 0$ jest zawsze spełniona, zatem $D = \mathbf{R}$.

Ćwiczenie 3

Podaj dziedzinę funkcji f .

a) $f(x) = \sqrt{x-8}$ b) $f(x) = \sqrt{3-x}$ c) $f(x) = \sqrt{-x}$

Przykład 4

a) Podaj miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x^2-16}{2x-8}$.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{4\}$. Zauważ, że $x^2 - 16 = 0$, gdy $x = -4$ lub $x = 4$. Ale jedynie liczba -4 jest miejscem zerowym funkcji f , ponieważ $4 \notin D$.

b) Podaj miejsca zerowe funkcji $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x-1}}$.

Funkcja f jest określona, gdy $x - 1 > 0$, zatem $D = (1; \infty)$. Zauważ, że $x + 2 = 0$ dla $x = -2$ oraz $-2 \notin D$, więc funkcja nie ma miejsc zerowych.

Ćwiczenie 4

Podaj dziedzinę i miejsca zerowe funkcji f .

a) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x-3}$

e) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$

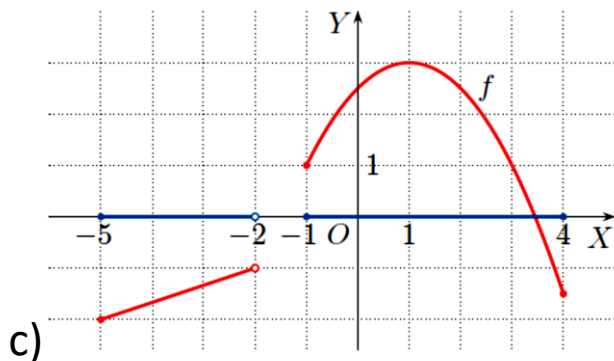
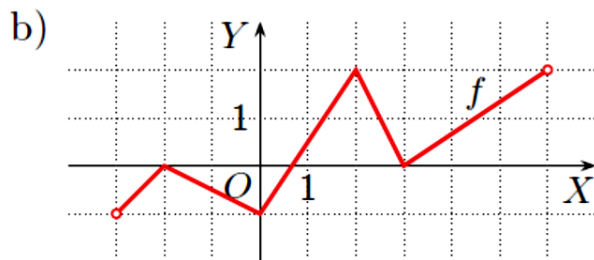
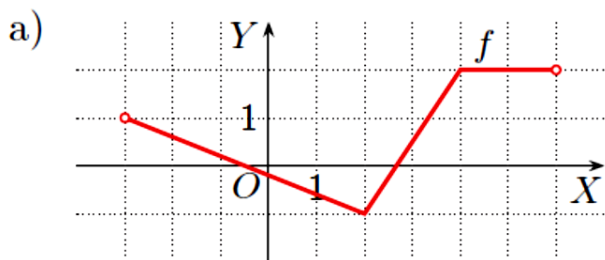
b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{1+2x}{4x-2}$

f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+2}}$

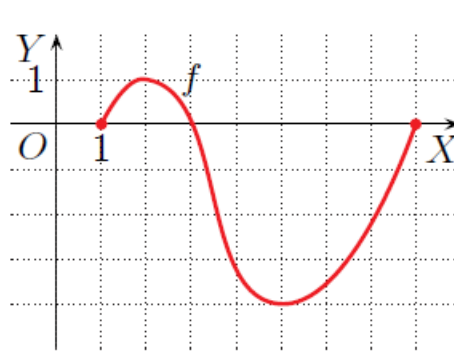
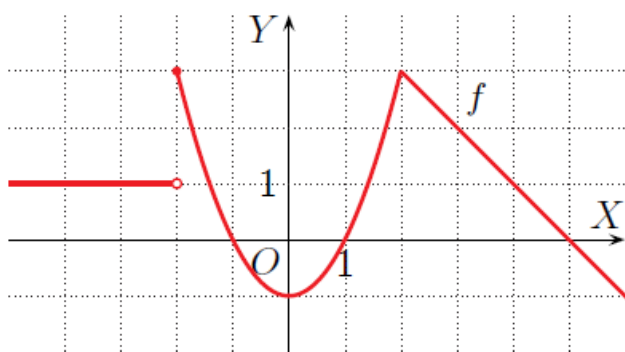
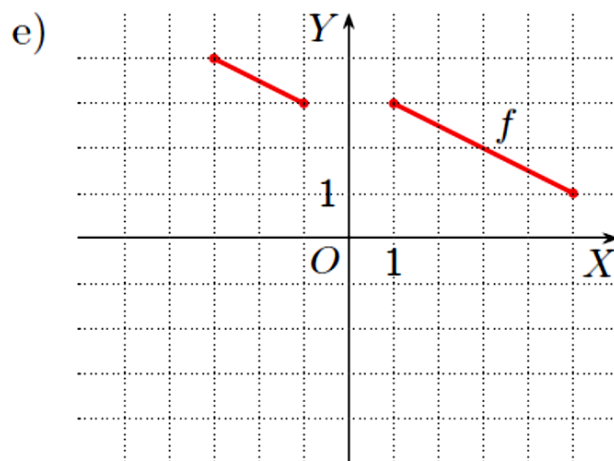
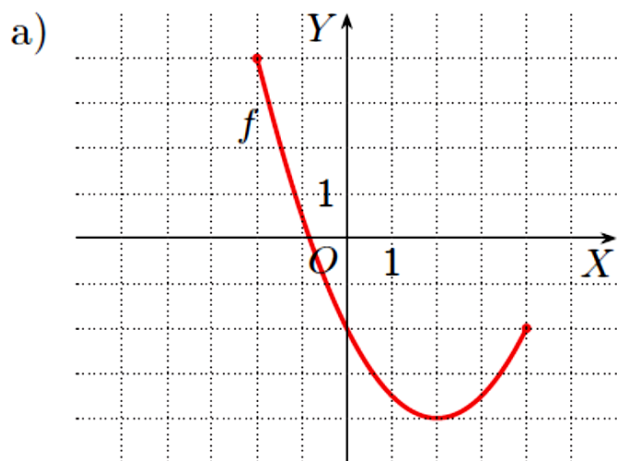
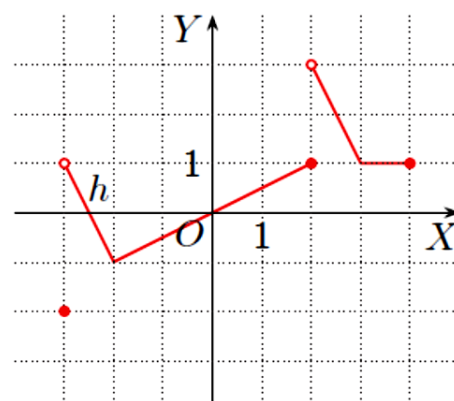
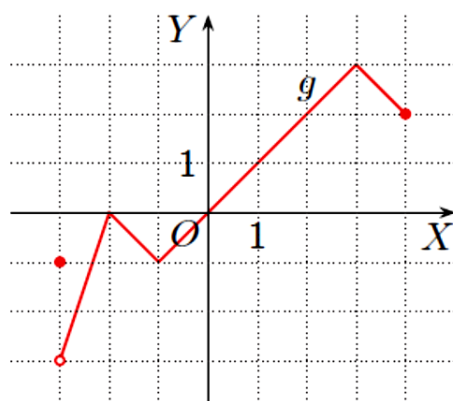
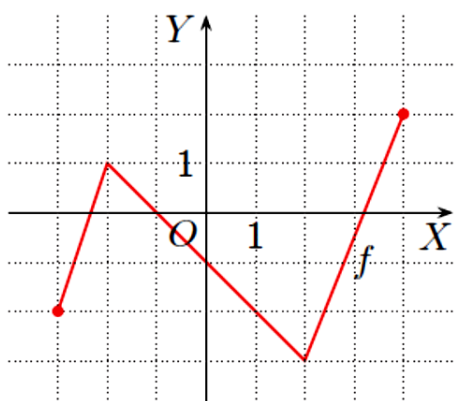
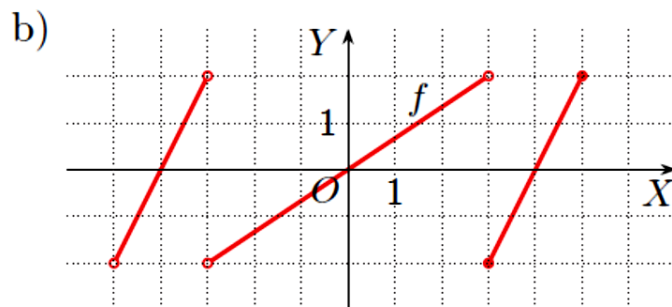
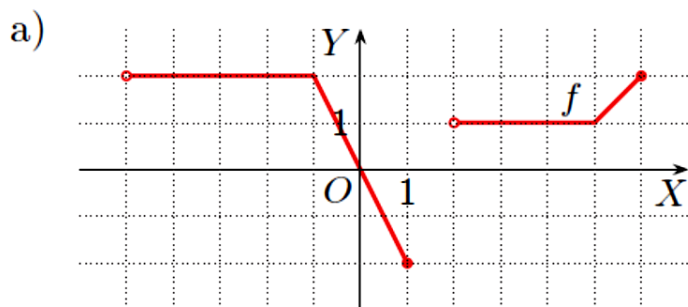
Monotoniczność funkcji

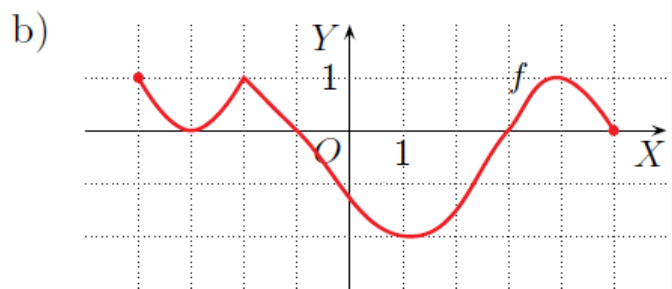
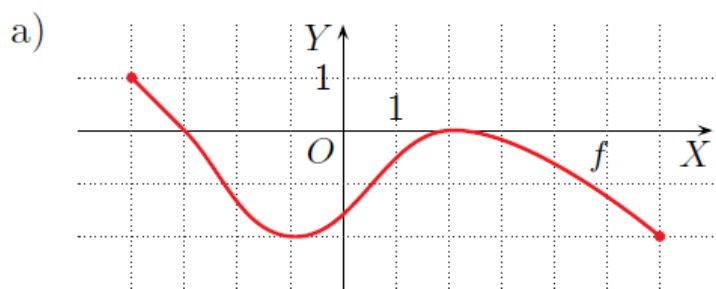
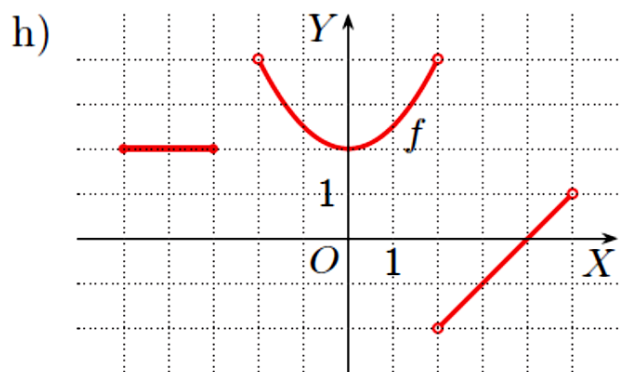
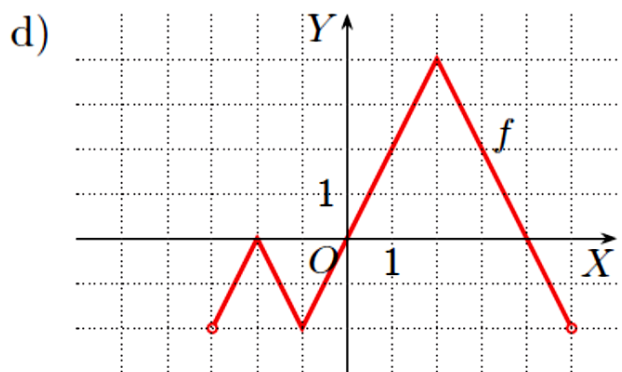
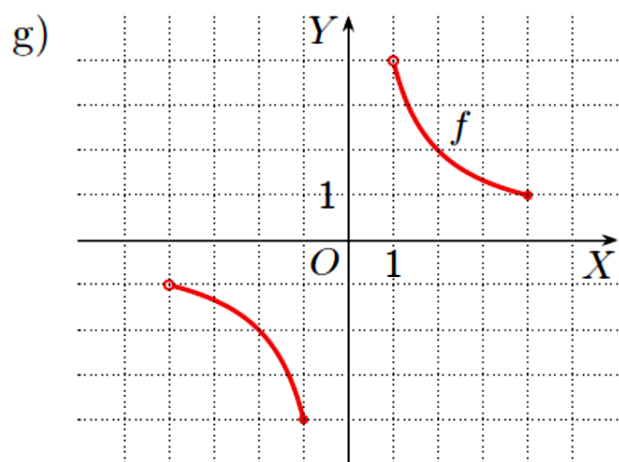
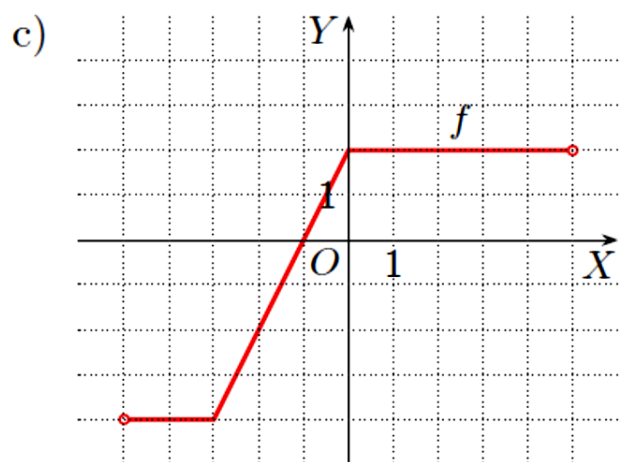
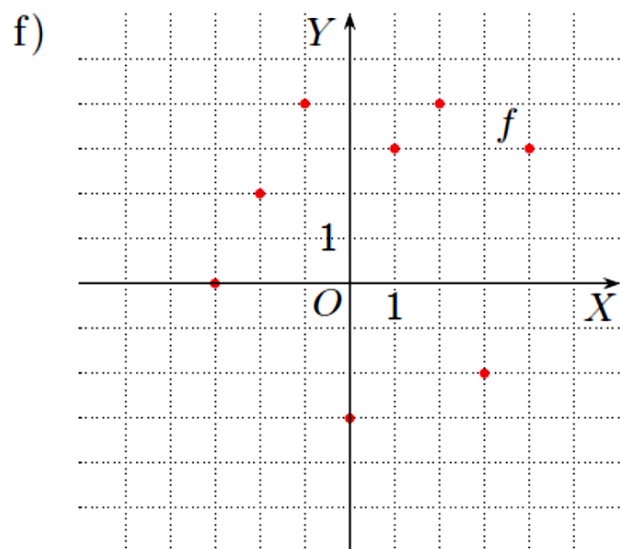
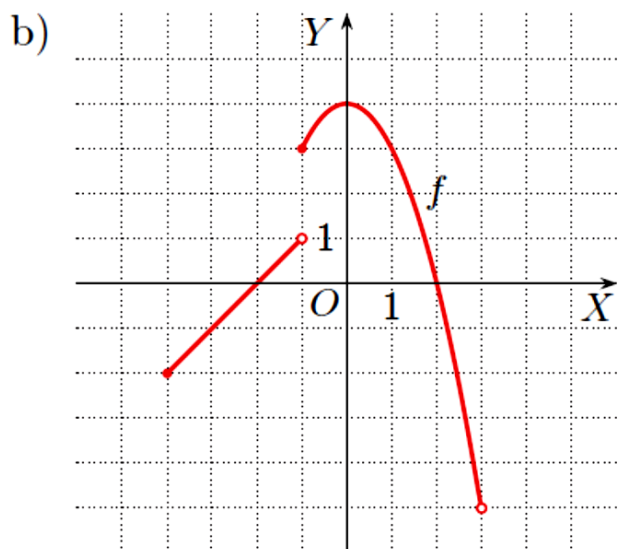
1. Dany jest wykres funkcji $f : (-3; 6) \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj przedziały monotoniczności tej funkcji.



Odczytywanie własności funkcji z wykresu

Z poniższych wykresów odczytaj dziedzinę, zbiór wartości funkcji, jej miejsca zerowe, najmniejszą i największą wartość, przedziały monotoniczności oraz przedziały, w których funkcja przyjmuje wartości dodatnie i ujemne.

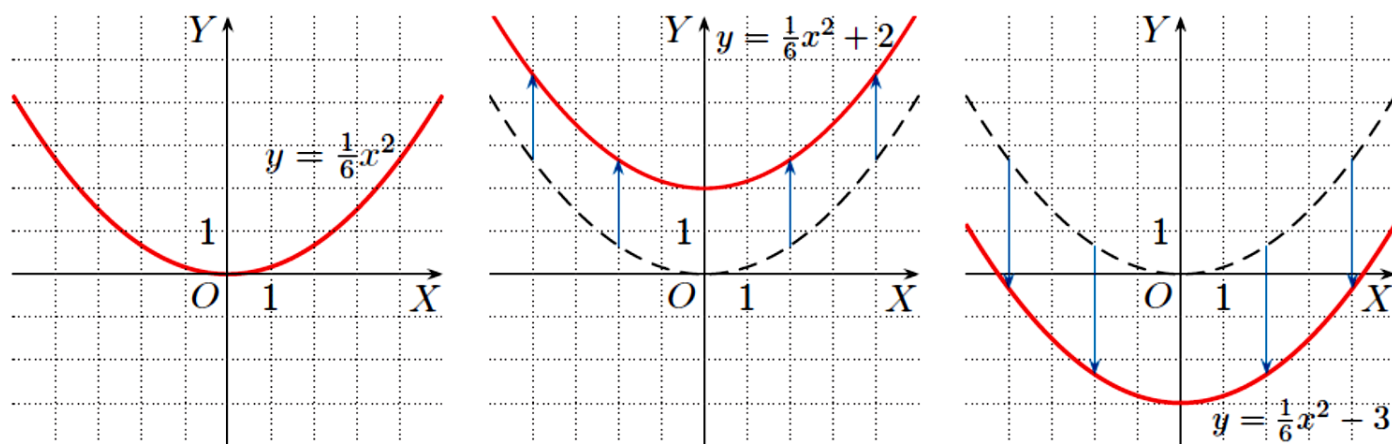




Przesuwanie wykresu funkcji wzdłuż osi układu

Przykład 1

Na rysunkach poniżej przedstawiono wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2$, $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ oraz $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$.



Wykresy funkcji: $y = \frac{1}{6}x^2 + 2$ i $y = \frac{1}{6}x^2 - 3$ można otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = \frac{1}{6}x^2$ wzdłuż osi OY o odpowiednią liczbę jednostek.

TWIERDZENIE

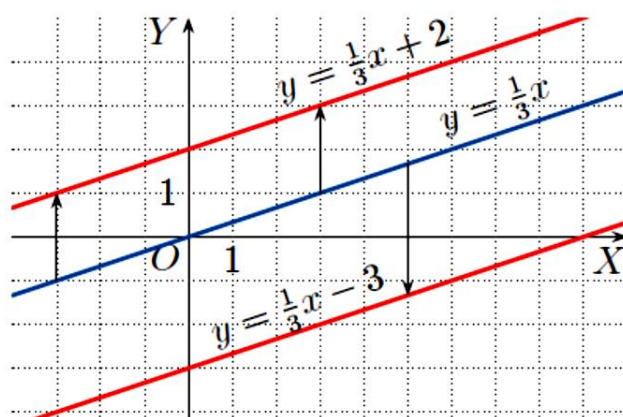
Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w górę** wzdłuż osi OY .

Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w dół** wzdłuż osi OY .

Przykład 2

Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 2 jednostki w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x + 2$.

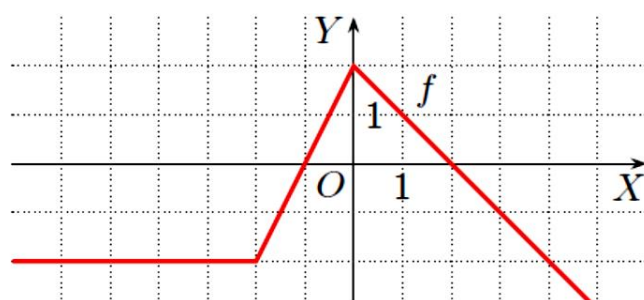
Jeśli przesuniemy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x$ o 3 jednostki w dół, to otrzymamy wykres funkcji $y = \frac{1}{3}x - 3$.



1. Dany jest wykres funkcji $y = f(x)$.

Naszczicuj wykres funkcji:

- a) $y = f(x) + 2$,
- b) $y = f(x) - 2$,
- c) $y = f(x) - 3$.

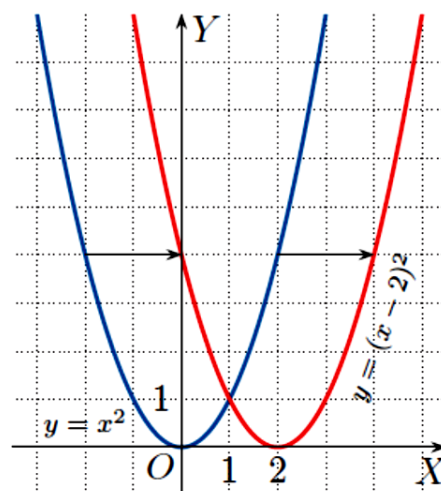


Przykład 1

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x - 2)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabeli wartości funkcji.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

x	-1	0	1	2	3	4	5
$y = (x - 2)^2$	9	4	1	0	1	4	9



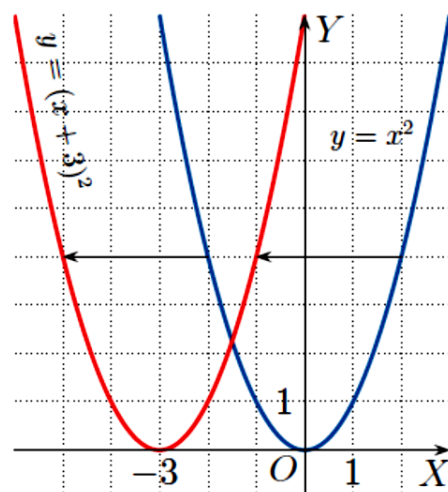
Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x - 2)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 2 jednostki w prawo wzdłuż osi OX .

Przykład 2

Na rysunku przedstawiono wykresy funkcji $y = x^2$ oraz $y = (x + 3)^2$ naszkicowane na podstawie odpowiednich tabeli wartości funkcji.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
$y = (x + 3)^2$	9	4	1	0	1	4	9

Zauważmy, że wykres funkcji $y = (x + 3)^2$ możemy otrzymać przez przesunięcie wykresu funkcji $y = x^2$ o 3 jednostki w lewo wzdłuż osi OX .



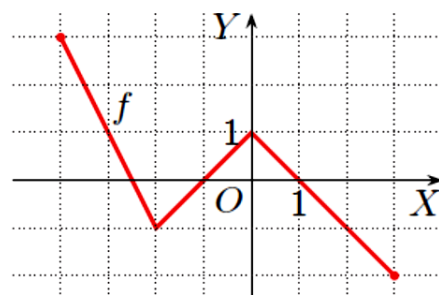
TWIERDZENIE

Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w prawo** wzdłuż osi OX .

Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w lewo** wzdłuż osi OX .

3. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -4; 3 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji g i podaj jej dziedzinę.

- a) $g(x) = f(x - 2)$ c) $g(x) = f(x + 1)$
b) $g(x) = f(x - 3)$ d) $g(x) = f(x + 2)$



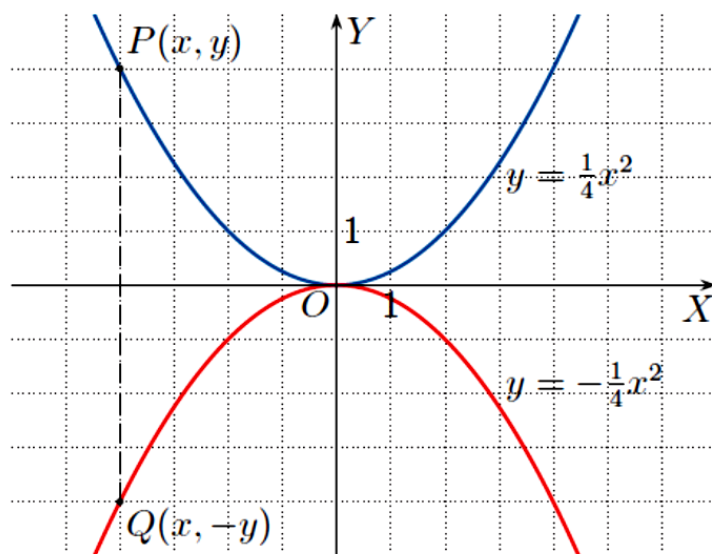
Przykład 1

Naszkicuj wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$.

Uzupełniamy tabelę wartości funkcji dla $y = \frac{1}{4}x^2$ oraz dla $y = -\frac{1}{4}x^2$.

x	-4	-2	-1	0	1	2	4
$y = \frac{1}{4}x^2$	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4
$y = -\frac{1}{4}x^2$	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4

Dla porównania wykresy tych funkcji narysowano w jednym układzie współrzędnych. Zauważmy, że wykresy funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ i $y = -\frac{1}{4}x^2$ są symetryczne względem osi OX – punktowi $P(x, y)$ należącemu do wykresu funkcji $y = \frac{1}{4}x^2$ odpowiada punkt $Q(x, -y)$ należący do wykresu funkcji $y = -\frac{1}{4}x^2$.

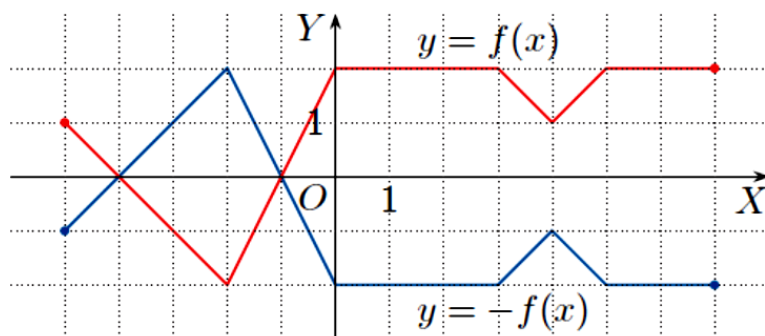


TWIERDZENIE

Wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OX .

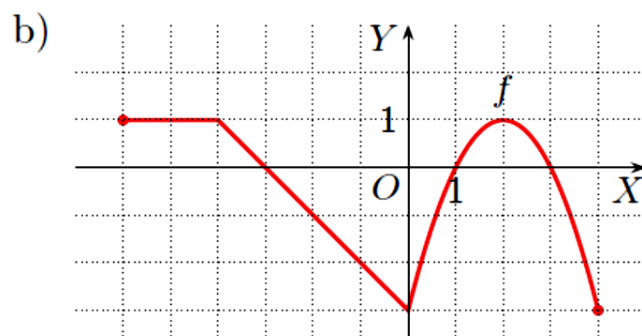
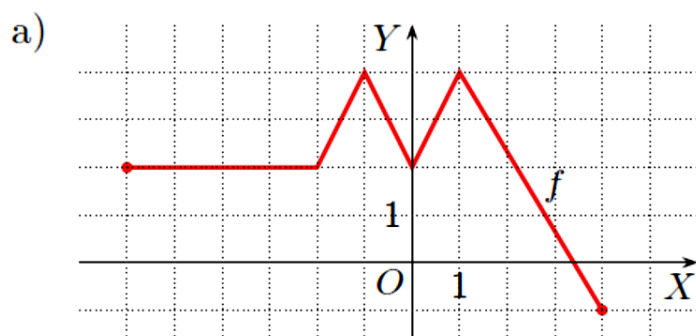
Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$ (kolor czerwony) oraz wykres funkcji $y = -f(x)$ (kolor niebieski).



Ćwiczenie 2

Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $f: \langle -6; 4 \rangle \rightarrow \mathbf{R}$. Naszkicuj wykres funkcji $g(x) = -f(x)$. Podaj zbiory wartości funkcji f i g .



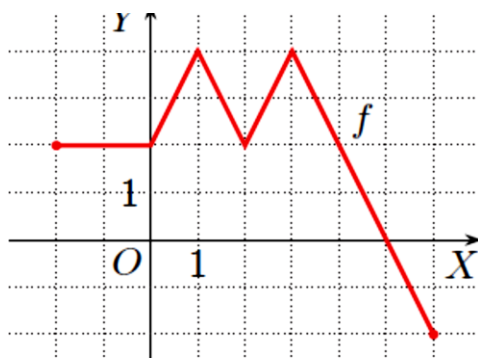
Zadanie

Naszkicuj wykres funkcji

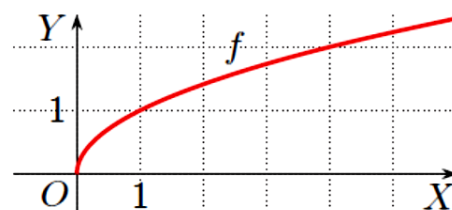
a) $f(x) = (x - 2)^2 - 1$ b) $f(x) = (x + 3)^2 - 2$ c) $f(x) = (x + 1)^2 + 1$

Zadanie

Naszkicuj wykresy funkcji: $f(x-1)+2$, $f(x+2)-1$, $f(x-3)$, $f(x)+2$, $f(x+1)$, $f(x)-1$, jeśli wykres funkcji f przedstawiono na wykresie:



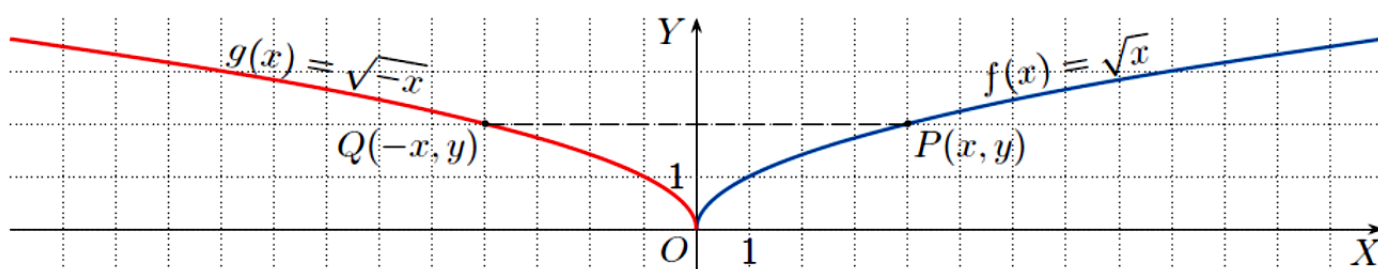
4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem $f(x) = \sqrt{x}$. Naszkicuj wykres funkcji g . Podaj jej dziedzinę i zbiór wartości.



a) $g(x) = \sqrt{x-1} + 3$ b) $g(x) = \sqrt{x+4} - 2$ c) $g(x) = \sqrt{x+1} - 1$

Przykład 4

Naszkicuj wykres funkcji $f: \langle 0; \infty \rangle \rightarrow \mathbf{R}$ danej za pomocą wzoru $f(x) = \sqrt{x}$ oraz wykres funkcji $g: (-\infty; 0] \rightarrow \mathbf{R}$ danej za pomocą wzoru $g(x) = \sqrt{-x}$.



Zauważmy, że wykresy funkcji f i g są symetryczne względem osi OY – punktowi $P(x,y)$ należącemu do wykresu funkcji f odpowiada punkt $Q(-x,y)$ należący do wykresu funkcji g .

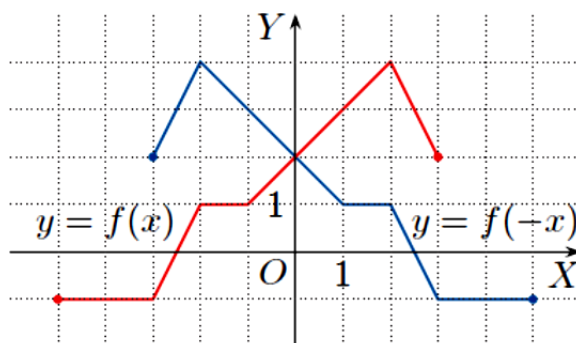
TWIERDZENIE

Wykres funkcji $y = f(-x)$ otrzymujemy przez symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi OY .

Przykład 5

Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$ (kolor czerwony) oraz wykres funkcji $y = f(-x)$ (kolor niebieski).

Zwróć uwagę na to, że dziedziną funkcji $y = f(x)$ jest zbiór $\langle -5; 3 \rangle$, a dziedziną funkcji $y = f(-x)$ – zbiór $\langle -3; 5 \rangle$.



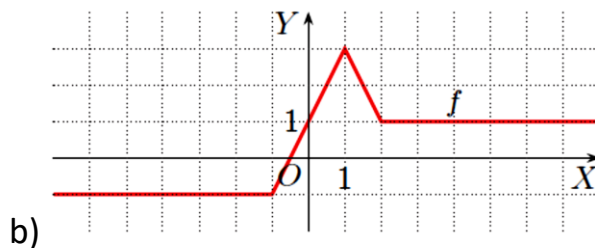
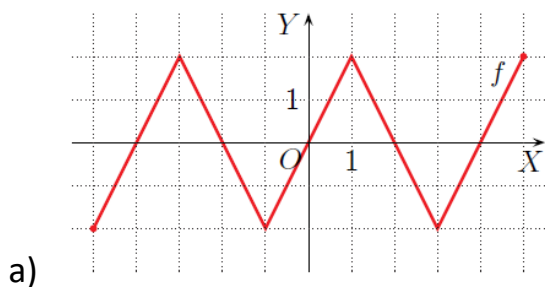
Ćwiczenie 5

Naszkicuj wykres funkcji f , a następnie kolejno wykresy funkcji g i h .

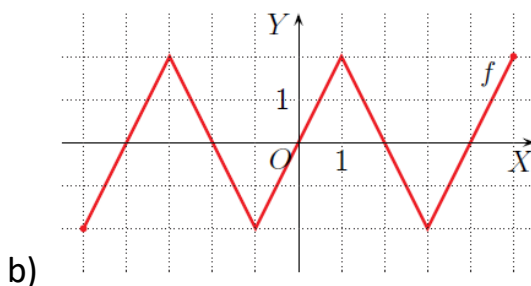
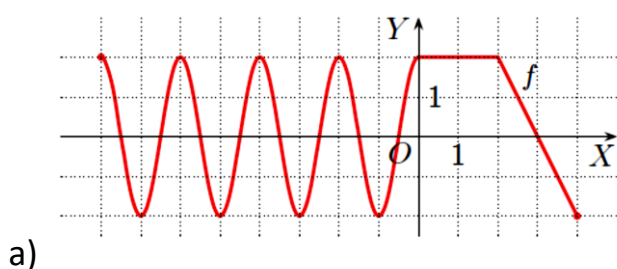
a) $f(x) = |x|$, $g(x) = f(x-2)$, $h(x) = f(-x-2)$

b) $f(x) = x^2$, $g(x) = f(x+2)$, $h(x) = f(-x+2)$

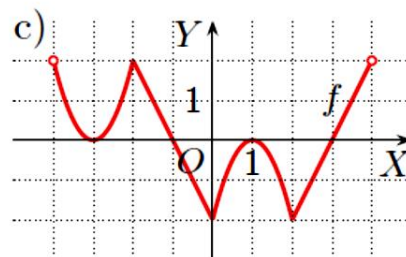
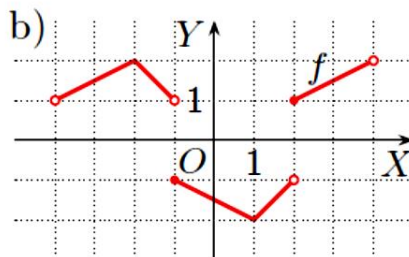
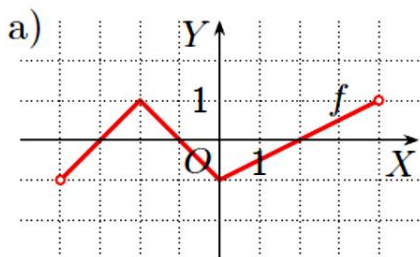
1. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Naszkiej wykres funkcji $g(x) = -f(x)$ oraz podaj zbiory wartości funkcji f i g .



3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji f . Określ dziedzinę i naszkicuj wykres funkcji $g(x) = f(-x)$.

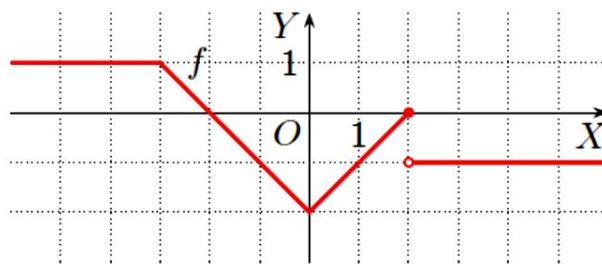


3. Dany jest wykres funkcji $f: (-4; 4) \rightarrow \mathbf{R}$. Podaj przedziały monotoniczności, miejsca zerowe i zbiór argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie.



4. Na rysunku obok przedstawiono wykres funkcji $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ danej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (-\infty; -3) \\ |x| - 2 & \text{dla } x \in \langle -3; 2 \rangle \\ -1 & \text{dla } x \in (2; \infty) \end{cases}$$



Naszkiej wykres funkcji $g(x) = f(-x)$. Podaj jej wzór, a następnie odczytaj z wykresu rozwiązanie:

- równania $g(x) = 0$ i zbiór rozwiązań nierówności $g(x) < 0$,
- równania $g(x) = 1$ i zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq 1$,
- równania $g(x) = -1$ i zbiór rozwiązań nierówności $g(x) \leq -1$.

Przykład 1

a) Rozwiąż równanie $2x^3 - 250 = 0$.

$$2x^3 = 250 \quad / : 2$$

$$x^3 = 125$$

Jedyną liczbą spełniającą równanie jest $\sqrt[3]{125}$, czyli $x = 5$.

b) Rozwiąż równanie $5x^3 + 40 = 0$.

$$5x^3 = -40 \quad / : 5$$

$$x^3 = -8$$

Jedyną liczbą spełniającą równanie jest $\sqrt[3]{-8}$, czyli $x = -2$.

Ćwiczenie 1

Rozwiąż równanie.

a) $7x^3 - 56 = 0$

c) $8x^3 - 1 = 0$

e) $5x^3 + 0,625 = 0$

b) $2x^3 + 54 = 0$

d) $27x^3 + 8 = 0$

f) $3x^3 - 192 = 0$

Przykład 2

a) Rozwiąż równanie $x^3 - 4x = 0$.

$$x(x^2 - 4) = 0 \quad \text{wyłączamy } x \text{ przed nawias}$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 - 4 = 0$$

Równość $x^2 - 4 = 0$ zachodzi, gdy $x = -2$ lub $x = 2$.

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: -2 , 0 i 2 .

b) Rozwiąż równanie $x^3 + 9x = 0$.

$$x(x^2 + 9) = 0 \quad \text{wyłączamy } x \text{ przed nawias}$$

$$x = 0 \text{ lub } x^2 + 9 = 0$$

Równanie $x^2 + 9 = 0$ jest sprzeczne.

Zatem jedynym rozwiązaniem jest liczba 0 .

Ćwiczenie 2

Rozwiąż równanie.

a) $x^3 - 9x = 0$

c) $4x^3 - x = 0$

e) $x^3 = 36x$

b) $x^3 + 64x = 0$

d) $9x^3 + x = 0$

f) $x^3 = -4x$

Przykład 3

Rozwiąż równanie $x(x+2)(x-3) = 0$.

Korzystamy z podanej obok własności i otrzymujemy:

$$x = 0 \text{ lub } x + 2 = 0 \text{ lub } x - 3 = 0.$$

$a \cdot b \cdot c = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy
 $a = 0$ lub $b = 0$ lub $c = 0$.

Zatem równanie ma trzy rozwiązania: 0, -2 i 3.

Ćwiczenie 3

Rozwiąż równanie.

a) $x(x-2)(x-4) = 0$

b) $x(x-5)(x+6) = 0$

c) $x(x+1)(2x+6) = 0$

d) $(x+1)(x+9)(3x-1) = 0$

e) $(x-9)(2x+1)(2x-3) = 0$

f) $(4x+1)(6x-9)(2x-8) = 0$

1. Rozwiąż równanie.

a) $3x^3 + 27 = 51$

b) $64x^3 + 7 = 8$

c) $2x^3 + 300 = 50$

d) $27x^3 + 9 = 8$

e) $x(x^2 + 2) = 2(x + 32)$

f) $x(x^2 - 4) = -4(x + 2)$

2. Ile rozwiązań równania należy do podanego przedziału?

a) $x^3 - 16x = 0$, $\langle -2; 6 \rangle$

b) $x^3 - 25x = 0$, $\langle -3; 5 \rangle$

c) $x^3 - 3x = 0$, $(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$

d) $4x - x^3 = 0$, $(-2; 4)$

e) $4x + x^3 = 0$, $(-4; 0)$

f) $x^3 - 6x = 30x$, $(-8; 8)$

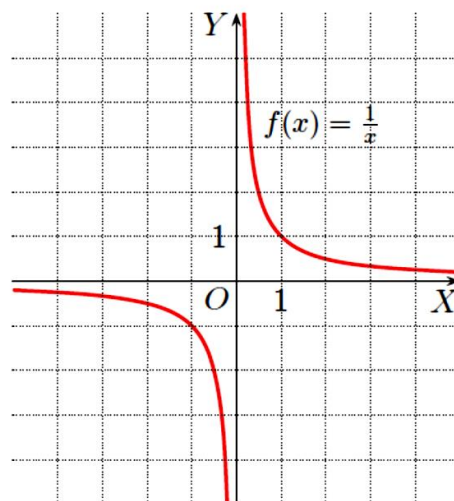
Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest określona dla $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Sporządzamy tabelę wartości funkcji f , a następnie szkicujemy jej wykres.

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$, gdzie $a \neq 0$, oraz każdą krzywą powstałą z tego wykresu przez przesunięcie równoległe nazywamy **hiperbolą**.

Własności funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$:

- dla $x < 0$ funkcja f przyjmuje wartości ujemne ($f(x) < 0$), natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości dodatnie ($f(x) > 0$),
- funkcja f nie ma miejsc zerowych,
- funkcja f jest **malejąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$.



Uwaga. Zauważ, że funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ nie jest malejąca w zbiorze $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$.

Hiperbola składa się z dwóch gałęzi.

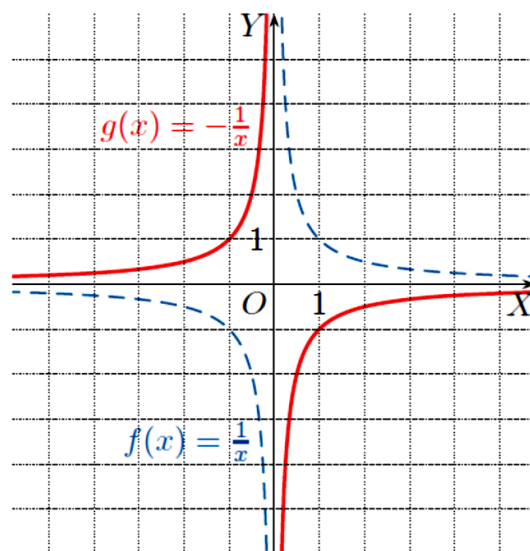
Zauważmy, że wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ „zbliża się” do prostej poziomej $y = 0$ i do prostej pionowej $x = 0$. O takich prostych mówimy, że są **asymptotami** wykresu funkcji. Proste poziome nazywamy **asymptotami poziomymi**, proste pionowe – **asymptotami pionowymi**.

Aby narysować wykres funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$, można sporządzić odpowiednią tabelę wartości funkcji lub wykorzystać wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

Przypomnijmy, że wykres funkcji $y = -f(x)$ otrzymujemy, odbijając symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $y = f(x)$.

Własności funkcji $g(x) = -\frac{1}{x}$:

- dla $x < 0$ funkcja g przyjmuje wartości dodatnie, natomiast dla $x > 0$ – przyjmuje wartości ujemne,
- funkcja g nie ma miejsc zerowych,
- funkcja g jest **rosnąca w przedziałach** $(-\infty; 0)$ i $(0; \infty)$, ale nie jest funkcją rosnącą w swojej dziedzinie,
- prosta $y = 0$ jest asymptotą poziomą, a prosta $x = 0$ – asymptotą pionową wykresu funkcji g .



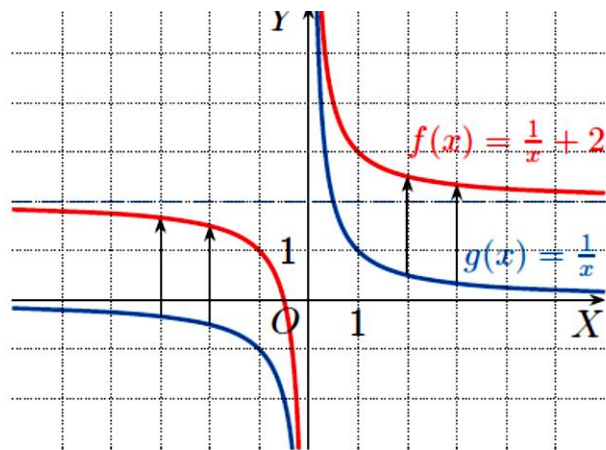
- Do wykresu funkcji $f(x) = \frac{a}{x}$ należy punkt P . Naszkicuj ten wykres.
 - $P(4, \frac{1}{2})$
 - $P(-\frac{1}{9}, -3)$
 - $P(8, -\frac{1}{2})$
 - $P(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$
- Dla jakiej wartości współczynnika a punkt P należy do hiperboli $y = \frac{a}{x}$?
 - $P(-1, 8)$
 - $P(4, -16)$
 - $P(-\frac{1}{7}, 2)$
 - $P(-5, -25)$

Uwaga: należy wstawić do wzoru współrzędne punktu P .

Przykład 1

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x} + 2$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = \frac{1}{x}$ o 2 jednostki w górę.

Prosta $y = 2$ jest asymptotą poziomą wykresu funkcji f , a prosta $x = 0$ – jego asymptotą pionową. Zbiorem wartości funkcji f jest $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.



Wykres funkcji $y = f(x) + q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w górę** wzdłuż osi OY .

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, a następnie, stosując odpowiednie przesunięcie, naszkicuj wykres funkcji g . Podaj zbiór wartości funkcji g oraz równania asymptot jej wykresu.

- $g(x) = \frac{1}{x} + 3$
- $g(x) = \frac{1}{x} - 1$
- $g(x) = \frac{1}{x} - 3$

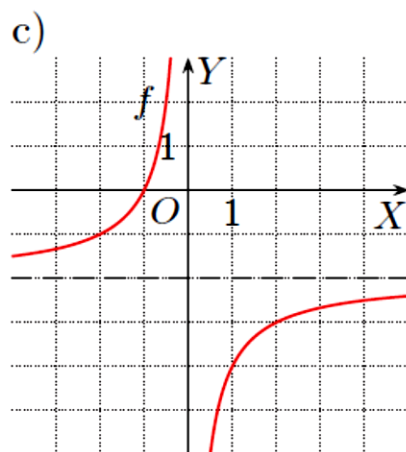
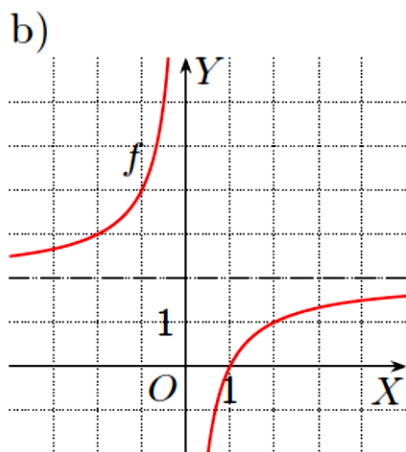
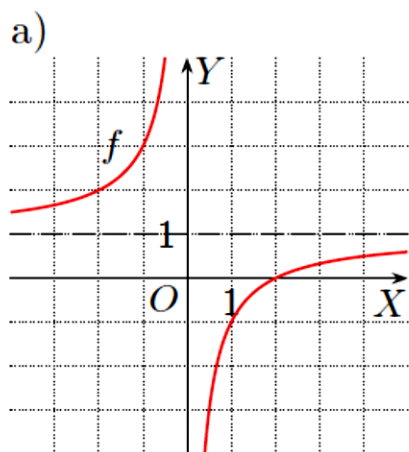
Wykres funkcji $y = f(x) - q$ dla $q > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o q jednostek **w dół** wzdłuż osi OY .

- Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj zbiór wartości tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.
 - $f(x) = -\frac{1}{x} - 1$
 - $f(x) = \frac{3}{x} - 2$
 - $f(x) = 1 + \frac{4}{x}$
 - $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$
 - $f(x) = \frac{6}{x} - 3$
 - $f(x) = -\frac{1}{2x} + 1$

2. Naskicuj wykresy funkcji f i g . Podaj wzór funkcji g , jej dziedzinę, zbiór wartości i równania asymptot, jeśli wykres funkcji g otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji f :

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ o 2 jednostki w górę, b) $f(x) = -\frac{4}{x}$ o 2 jednostki w dół.

3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = -\frac{2}{x} + a$. Podaj parametr a oraz wszystkie punkty o obu współrzędnych całkowitych należące do wykresu funkcji f .



4. Dla jakich wartości współczynnika q punkt P należy do wykresu funkcji f ?

a) $f(x) = \frac{6}{x} + q$, $P(3, 1)$

c) $f(x) = -\frac{1}{3x} + q$, $P(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

b) $f(x) = -\frac{2}{x} + q$, $P(-6, -\frac{1}{2})$

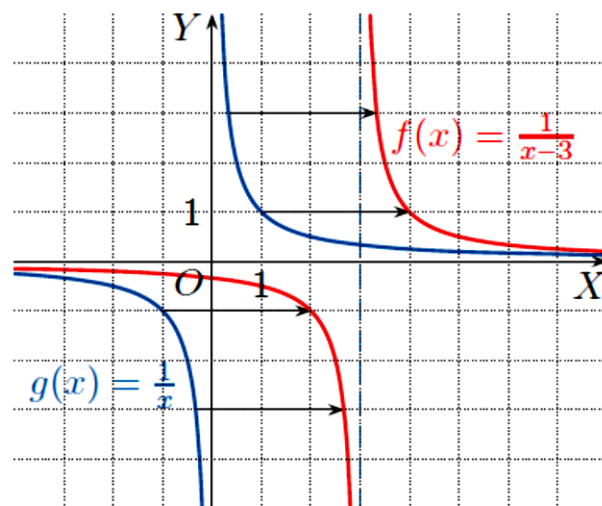
d) $f(x) = \frac{\sqrt{6}}{x} + q$, $P(-\sqrt{2}, \sqrt{3})$

Przykład 1

Naskicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

Wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x-3}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = \frac{1}{x}$ o 3 jednostki w prawo.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{3\}$. Prosta $x = 3$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji f , a prosta $y = 0$ – jego asymptotą poziomą.



Wykres funkcji $y = f(x - p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w prawo** wzdłuż osi OX .

Ćwiczenie 1

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę tej funkcji i równania asymptot jej wykresu.

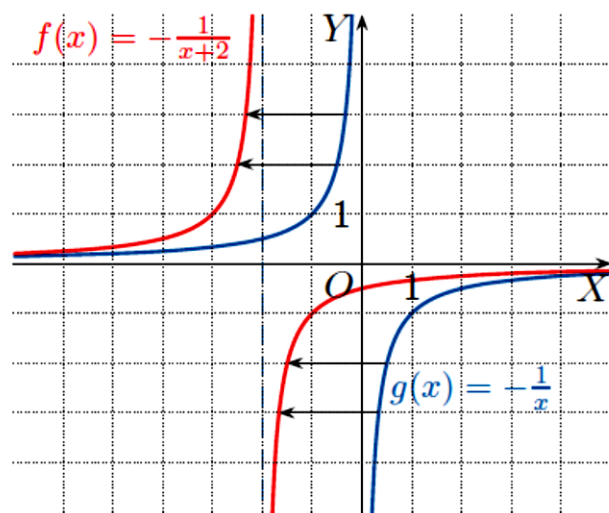
a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{2}{x-4}$ c) $f(x) = \frac{-1}{x-1}$ d) $f(x) = \frac{-2}{x-2}$

Przykład 2

Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x+2}$.

Wykres funkcji $f(x) = -\frac{1}{x+2}$ otrzymujemy przez przesunięcie hiperboli $g(x) = -\frac{1}{x}$ o 2 jednostki w lewo.

Dziedziną funkcji f jest zbiór $\mathbf{R} \setminus \{-2\}$. Asymptotą pionową jej wykresu jest prosta $x = -2$, a asymptotą poziomą – prosta $y = 0$.



Wykres funkcji $y = f(x + p)$ dla $p > 0$ otrzymujemy przez przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o p jednostek **w lewo** wzdłuż osi OX .

Ćwiczenie 2

Naszkicuj wykres funkcji f . Podaj dziedzinę i przedziały monotoniczności tej funkcji oraz równania asymptot jej wykresu.

a) $f(x) = -\frac{1}{x+1}$ c) $f(x) = -\frac{2}{x+3}$ e) $f(x) = -\frac{4}{x+4}$
b) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ d) $f(x) = \frac{3}{x+2}$ f) $f(x) = \frac{4}{x+4}$

4. Naszkicuj wykresy funkcji f i g . Podaj równania ich asymptot.

a) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $g(x) = \frac{1}{x-2} + 1$ b) $f(x) = \frac{4}{x+1}$, $g(x) = \frac{4}{x+1} - 2$

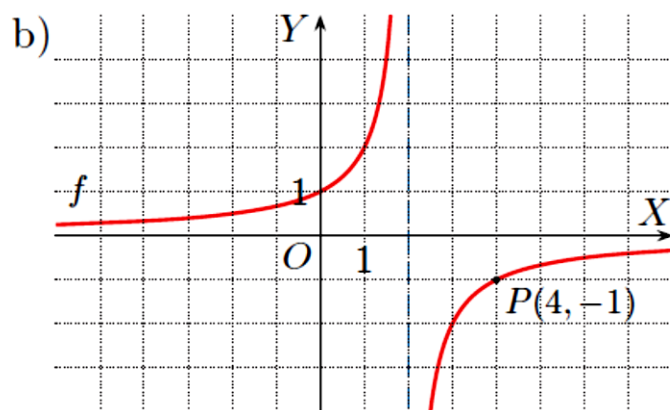
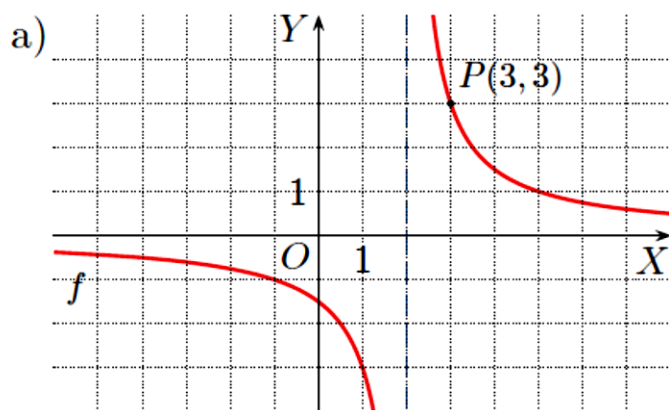
1. Naszkicuj wykres funkcji f i podaj jej przedziały monotoniczności.

a) $f(x) = \frac{1}{x-4}$ b) $f(x) = \frac{-4}{x+1}$ c) $f(x) = \frac{-1}{x+3}$ d) $f(x) = \frac{2}{x-2}$

2. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2}{x-a}$, jeśli jego asymptota pionowa przechodzi przez punkt Q .

a) $Q(1, 6)$ b) $Q(-3, 8)$ c) $Q(\frac{1}{2}, 0)$ d) $Q(-\frac{3}{2}, 15)$

3. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $f(x) = \frac{a}{x-2}$ dla pewnego a . Wyznacz wzór funkcji f . Oblicz $f(1\frac{3}{4})$ i $f(-4)$.



Przykład 1

Podaj dziedzinę wyrażenia $\frac{2x^2-6x+5}{2x+8}$.

$2x+8=0$ dla $x=-4$, więc dziedziną wyrażenia jest zbiór $D = \mathbf{R} \setminus \{-4\}$.

Ćwiczenie 1

Podaj dziedzinę wyrażenia.

a) $-\frac{3}{4x}$

b) $\frac{6}{x-5}$

c) $\frac{x-3}{2x+6}$

d) $\frac{-x^2+9}{-2x+7}$

Ćwiczenie 2

Podaj dziedzinę wyrażenia. Oblicz jego wartości dla $x=1$ oraz $x=-1$.

a) $\frac{x+1}{x}$

b) $\frac{2x+4}{x-3}$

c) $\frac{4x}{x^2-9}$

d) $\frac{x+3}{x^2+3}$

Czasami wyrażenie wymierne można uprościć. Należy jednak pamiętać, że dziedziną wyrażenia uproszczonego jest dziedzina wyrażenia przed uproszczeniem.

Przykład 2

a) Uprość wyrażenie $\frac{8x^2}{2x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{8x^2}{2x} = 4x$$

b) Uprość wyrażenie $\frac{x-3}{2x-6}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$.

$$\frac{x-3}{2x-6} = \frac{x-3}{2(x-3)} = \frac{1}{2}$$

Ćwiczenie 3

Podaj dziedzinę wyrażenia, a następnie je uprość.

a) $\frac{6x^2}{4x}$

c) $\frac{2x-2}{x-1}$

e) $\frac{x^2-x}{x}$

g) $\frac{x^2-1}{x-1}$

b) $\frac{4x}{2x^2}$

d) $\frac{x+2}{3x+6}$

f) $\frac{2x^2+4x}{x}$

h) $\frac{x+2}{x^2-4}$

Przykład 1

a) Wykonaj mnożenie $\frac{x}{x-2} \cdot \frac{x-2}{2x^2}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, 2\}$.

$$\frac{x}{\cancel{x-2}} \cdot \frac{\cancel{1} \cancel{x-2}}{2x^2} = \frac{\cancel{1} \cancel{x}}{2x^2} = \frac{1}{2x}$$

b) Wykonaj mnożenie $\frac{16}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{2}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{3\}$.

$$\frac{16}{x-3} \cdot \frac{x^2-9}{2} = \frac{8 \cancel{16}}{\cancel{1} \cancel{x-3}} \cdot \frac{\cancel{1} \cancel{(x-3)} (x+3)}{\cancel{2} 1} = 8x + 24$$

Ćwiczenie 1

Podaj odpowiednie założenia i wykonaj mnożenie.

a) $\frac{6x}{x+3} \cdot \frac{x+3}{x^2}$

c) $\frac{x+1}{x-3} \cdot \frac{2x-6}{x}$

e) $\frac{2x-10}{x+1} \cdot \frac{3x+3}{x-5}$

b) $\frac{2x+4}{4x} \cdot \frac{8x^2}{2x+4}$

d) $\frac{x-4}{18x} \cdot \frac{12}{4-x}$

f) $\frac{2x+2}{x-2} \cdot \frac{x-3}{3x+3}$

Ćwiczenie 2

Podaj odpowiednie założenia i wykonaj mnożenie.

a) $\frac{14}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{7}$

c) $\frac{x^2}{x^2-9} \cdot \frac{x-3}{x}$

e) $\frac{4x^2-1}{4} \cdot \frac{6}{2x-1}$

b) $\frac{24}{x^2-16} \cdot \frac{x-4}{3}$

d) $\frac{2x}{x+6} \cdot \frac{x^2-36}{x^2}$

f) $\frac{3x+2}{3} \cdot \frac{12}{9x^2-4}$

Przykład 2

Wykonaj dzielenie $\frac{4}{x+4} : \frac{2}{3x+12}$.

Zakładamy, że $x+4 \neq 0$ i $3x+12 \neq 0$,
zatem $x \in \mathbf{R} \setminus \{-4\}$.

$$\frac{4}{x+4} : \frac{2}{3x+12} = \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{x+4}_1} \cdot \frac{3 \cancel{(x+4)}^1}{\cancel{2}_1} = 6$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

dla $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$

Ćwiczenie 3

Podaj odpowiednie założenia i wykonaj dzielenie.

a) $\frac{6}{x-2} : \frac{3}{4x-8}$

c) $\frac{18}{2x-6} : \frac{-3}{4x-12}$

e) $\frac{9x}{2x+4} : \frac{6}{x+2}$

b) $\frac{-5}{2x+1} : \frac{10}{6x+3}$

d) $\frac{-6}{3-2x} : \frac{9}{4x-6}$

f) $\frac{10x^2}{x-5} : \frac{5}{10-2x}$

Przykład 3

a) Wykonaj dodawanie $\frac{2}{x} + \frac{1}{3x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$.

$$\frac{2}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot x} + \frac{1}{3x} = \frac{6}{3x} + \frac{1}{3x} = \frac{7}{3x} \quad \begin{array}{l} \text{wspólnym mianownikiem} \\ \text{obu ułamków jest } 3x \end{array}$$

b) Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x+2} - \frac{3x}{2x+4}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{-2\}$.

$$\frac{1}{x+2} - \frac{3x}{2x+4} = \frac{2}{2(x+2)} - \frac{3x}{2x+4} = \frac{2}{2x+4} - \frac{3x}{2x+4} = \frac{2-3x}{2x+4} \quad \begin{array}{l} \text{wspólnym mianow-} \\ \text{nikiem obu ułam-} \\ \text{ków jest } 2x+4 \end{array}$$

Ćwiczenie 4

Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działanie.

a) $\frac{6}{x} + \frac{5}{2x}$

c) $\frac{3}{x-2} + \frac{x}{2x-4}$

e) $\frac{x+1}{x-3} + \frac{2x-5}{4x-12}$

b) $\frac{4}{3x} - \frac{3}{4x}$

d) $\frac{x}{3x+3} - \frac{1}{x+1}$

f) $\frac{2x-1}{3x+6} - \frac{x-1}{x+2}$

Przykład 4

a) Wykonaj dodawanie $\frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$.

$$\begin{aligned} \frac{-4}{2x+1} + \frac{2}{x} &= \frac{-4x}{(2x+1)x} + \frac{2(2x+1)}{(2x+1)x} = \quad \begin{array}{l} \text{wspólnym mianownikiem} \\ \text{obu ułamków jest } (2x+1)x \end{array} \\ &= \frac{-4x+4x+2}{(2x+1)x} = \frac{2}{(2x+1)x} \end{aligned}$$

b) Wykonaj odejmowanie $\frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2-9}$, gdzie $x \in \mathbf{R} \setminus \{-3, 3\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-3} - \frac{x}{x^2-9} &= \frac{1}{x-3} - \frac{x}{(x-3)(x+3)} = \\ &= \frac{x+3}{(x-3)(x+3)} - \frac{x}{(x-3)(x+3)} = \quad \begin{array}{l} \text{wspólnym mianownikiem} \\ \text{obu ułamków jest} \\ (x+3)(x-3) \end{array} \\ &= \frac{x+3-x}{(x-3)(x+3)} = \frac{3}{x^2-9} \end{aligned}$$

Ćwiczenie 5

Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działanie.

a) $\frac{2}{x-3} + \frac{4}{x+3}$

c) $\frac{2}{x} + \frac{2}{x+3}$

e) $\frac{x+6}{x^2-9} + \frac{-2}{x+3}$

b) $\frac{x-5}{x} - \frac{x}{x+2}$

d) $\frac{6}{x-2} - 3$

f) $\frac{8}{x^2-16} + \frac{4}{x-4}$

1. Podaj odpowiednie założenia i wykonaj mnożenie. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = \frac{1}{2}$.

a) $\frac{x-2}{x} \cdot \frac{3x^2}{2x-4}$

c) $\frac{x^3}{3-x} \cdot \frac{3x-9}{x}$

e) $\frac{(x+1)^2}{3x-1} \cdot \frac{6x-2}{x+1}$

b) $\frac{4x}{x-1} \cdot \frac{1-x}{x^2}$

d) $\frac{x-\frac{1}{2}}{x^2} \cdot \frac{2x^3}{2x-1}$

f) $\frac{2+x}{x-4} \cdot \frac{(4-x)^2}{4x+8}$

2. Podaj odpowiednie założenia i wykonaj dzielenie. Oblicz wartość wyrażenia dla $x = -\frac{1}{2}$.

a) $\frac{3}{4x} : \frac{1}{2x^2}$

c) $\frac{4x+2}{x^2} : \frac{2}{x}$

e) $\frac{x}{x-4} : \frac{3}{2x-8}$

b) $\frac{6}{5x^2} : \frac{3}{10x}$

d) $\frac{6x-9}{x} : \frac{3}{x^2}$

f) $\frac{20x}{3x-1} : \frac{5}{2-6x}$

5. Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działanie.

a) $\frac{x}{x-2} + \frac{2-2x}{x-2}$

c) $\frac{-x}{x+4} - \frac{3-x}{2x+8}$

e) $\frac{x-1}{2x+4} + \frac{x+7}{3x+6}$

b) $\frac{x+3}{2x-1} + \frac{3x+1}{1-2x}$

d) $\frac{2}{2-3x} - \frac{1+x}{6x-4}$

f) $\frac{2x}{10x-15} - \frac{x-2}{2x-3}$

6. Podaj odpowiednie założenia i wykonaj działanie. Oblicz wartość otrzymanego wyrażenia dla $x = -2$.

a) $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x}$

c) $\frac{1}{x} - \frac{1}{2-x}$

e) $\frac{3}{2x-1} + \frac{3}{2x+1}$

b) $\frac{1}{3x} - \frac{1}{2x}$

d) $\frac{4}{x-1} - \frac{4}{x}$

f) $\frac{x}{x-4} - \frac{x}{4+x}$